Philosophiques

Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1903)

Sébastien Gandon

Volume 33, numéro 2, automne 2006

URI : https://id.erudit.org/iderudit/013886ar
DOI : https://doi.org/10.7202/013886ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Société de philosophie du Québec

ISSN

0316-2923 (imprimé)
1492-1391 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Gandon, S. (2006). Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1903). *Philosophiques*, *33*(2), 333–361. https://doi.org/10.7202/013886ar

Résumé de l'article

La théorie russellienne des relations est ordinairement conçue comme le résultat d'une réflexion logique et ontologique sur l'ordre et l'asymétrie. Le présent article vise à présenter une autre généalogie, centrée sur les concepts de grandeur et de vecteur. Nous montrons en premier lieu que la thèse de l'irréductibilité des relations est avancée pour la première fois en 1897, à l'occasion d'une reformulation de la dialectique hégélienne de la quantité. Nous soulignons, en second lieu, que la notion de grandeur fait, autour des années 1898-1899, l'objet d'une formalisation mathématique, complètement indépendante de la théorie des relations et fondée exclusivement sur les algèbres vectorielles. Nous montrons enfin que Russell, en possession de sa nouvelle doctrine logique, développe dès 1901 une théorie relationnelle des grandeurs vectorielles. Tout se passe donc comme si un des intérêts de la nouvelle théorie était, pour le philosophe, de permettre la substitution des relations aux grandeurs.

Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1903)

SÉBASTIEN GANDON
PHIER — Université Blaise Pascal, Clermont II
sgandon@wanadoo.fr

RÉSUMÉ. — La théorie russellienne des relations est ordinairement conçue comme le résultat d'une réflexion logique et ontologique sur l'ordre et l'asymétrie. Le présent article vise à présenter une autre généalogie, centrée sur les concepts de grandeur et de vecteur. Nous montrons en premier lieu que la thèse de l'irréductibilité des relations est avancée pour la première fois en 1897, à l'occasion d'une reformulation de la dialectique hégélienne de la quantité. Nous soulignons, en second lieu, que la notion de grandeur fait, autour des années 1898-1899, l'objet d'une formalisation mathématique, complètement indépendante de la théorie des relations et fondée exclusivement sur les algèbres vectorielles. Nous montrons enfin que Russell, en possession de sa nouvelle doctrine logique, développe dès 1901 une théorie relationnelle des grandeurs vectorielles. Tout se passe donc comme si un des intérêts de la nouvelle théorie était, pour le philosophe, de permettre la substitution des relations aux grandeurs.

ABSTRACT. — Russell's theory of relation is usually conceived as the result of the logical and ontological analysis of the notion of order. This article aims at presenting another genealogy, that focuses on magnitudes and vectors. We firstly show that the notion of relation is used for the first time in 1897 as a means to reformulate the hegelian dialectic of quantites and qualities. We secondly outline that this conception, around 1898-1899, is the subject of a mathematical formalisation, that is completely independent of the theory of relation and that is exclusively founded on vectorial algebras. We finally show that Russell, once being in possession of his new logical doctrine, elaborates, as soon as 1901, a relational theory of vectorial magnitudes. Thus, all happens as if the main interest of the new theory was, for Russell, to substitute the notion of magnitude by the notion of relation.

L'admission de formes relationnelles primitives dans le nouveau calcul présenté dans l'ouvrage *Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries* (Russell 1901) constitue, à n'en pas douter, un tournant fondamental dans l'histoire de la logique. Mais, selon Russell, cette rupture avec le cadre aristotélicien entraîne également des bouleversements hors du domaine logique, dans le champ ontologique : le monisme d'un Bradley ou le monadisme d'un Leibniz[1] ne sont plus les seules voies permettant d'éviter les « apories » engendrées par l'application de la pensée à l'être.

1. Voir les classiques : Griffin, 1990, p. 314-370, et Hylton, 1990, p. 117-167.

Dans l'œuvre du philosophe, le lien étroit entre les deux dimensions, logique et ontologique, de la théorie des relations se manifeste surtout en deux occasions : d'une part, dans les analyses consacrées à l'espace, où Russell s'appuie sur la nouvelle logique polyadique pour montrer que les relations ordinales sont dénuées de contradiction ; d'autre part, dans l'interprétation du système leibnizien, considéré dans *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*, comme une conséquence de l'adhésion à l'idée selon laquelle toute proposition est de forme prédicative.

Le lien entre logique et métaphysique est indéniablement au cœur des *Principles*, et Russell lui-même, dans les nombreuses redescriptions de son évolution intellectuelle, souligne toujours que la double dimension de la théorie des relations constitue un des fils directeurs de sa pensée[2]. Il reste, cependant, que cette façon de raconter l'histoire, non seulement néglige tout un pan de la très foisonnante activité conduisant à la rédaction de (Russell, 1903), mais s'ajuste mal avec certains éléments fournis par les manuscrits et les articles publiés pendant cette période.

En premier lieu, le problème des relations naît chez Russell bien avant la lecture de Leibniz et la remise en cause de la forme sujet-prédicat ; la question de leur nature est posée dès 1897 dans le contexte d'une interrogation générale sur la nature de la quantité et sur celle des « *series* ». En second lieu, ce concept de série, dérivé dans le livre IV des *Principles* de la notion de relation (asymétrique et transitive), fait dès 1898-1899, l'objet d'une élaboration mathématique très poussée : le terme recouvre alors celui de « grandeurs positionnelles », c'est-à-dire, en langage plus contemporain, de vecteurs — aucune référence n'est faite alors aux relations. En troisième lieu, lorsque Russell met au point sa théorie des relations, il s'assure immédiatement, comme le montre la version anglaise[3] de *Sur la logique des relations* (Russell 1901), que cette nouvelle approche permet le développement d'une théorie générale de la grandeur et des vecteurs.

Ces éléments, à première vue épars, nous semblent dessiner un paysage dans lequel le lien entre grandeurs, vecteurs et relations occupe le premier plan. Le concept de relation est en effet discuté en tant que tel, dès 1897, à l'occasion d'une discussion sur la quantité ; la notion de série est, peu après, formalisée dans le cadre des algèbres grassmanniennes ; enfin, lorsque Russell entre en possession de sa nouvelle logique, il s'empresse de développer une théorie purement relationnelle des vecteurs, comme si la puissance du nouveau calcul se manifestait dans la possibilité d'accomplir une telle tâche. Le rapport entre relation et grandeur est un fil qui traverse la genèse de la théorie russellienne des relations, et c'est ce fil que nous nous proposons de suivre. La thèse que nous voudrions défendre est la suivante : la théorie des relations, telle qu'elle est élaborée en 1901, peut être considérée comme la syn-

2. Russell, 1919, p. 81-116, Russell, 1959, p. 67-81.
3. Il s'agit de Russell, 1900b.

thèse de deux mouvements de pensée de nature fort différente : l'un est métaphysique et reprend les analyses post-hégéliennes de la quantité, développées dans l'idéalisme anglais (notamment chez Bosanquet) ; l'autre est mathématique et s'appuie sur l'approche grassmanienne de la grandeur, telle qu'elle est reprise et exposée dans *A Treatrise on Universal Algebra,* de Whitehead.

Nous présenterons d'abord (§1 et 2) les grandes lignes de l'analyse que Russell développe dans un article datant de 1897, intitulé *On the Relations of Numbers and Quantity*, en soulignant à quel point ces développements s'inscrivent dans la tradition néo-hégélienne. Nous nous tournerons ensuite (§3) vers la réception russellienne des algèbres étudiées par Whitehead, pour examiner les tensions engendrées par la combinaison de l'approche philosophique, marquée par l'hégélianisme de Bradley et de Bosanquet, et le formalisme vectoriel. Dans une troisième partie (§4 et 5), nous étudierons la façon dont Russell conçoit, en 1901, une fois sa théorie des relations en main, la notion de grandeur mesurable, et nous indiquerons comment cette élaboration finale met un terme au désajustement entre approche philosophique et mathématique de la quantité.

1. Quantité et comparaison dans l'Essay

Dans *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897a), la géométrie métrique, conçue comme une géométrie quantitative, est subordonnée à la théorie projective, considérée comme une géométrie de la qualité. Le concept de distance, explique Russell, présuppose en effet « une identité [...] de qualité, dont la détermination est [...] le problème de la géométrie projective »[4] (1897a, p. 147). Mais si la distinction entre quantité et qualité structure l'organisation de l'*Essay*, elle n'est pas, en 1897, étudiée pour elle-même. Le philosophe focalise alors son attention sur la « forme de l'externalité », c'est-à-dire sur les seules qualités et quantités spatiales. À l'occasion de l'examen d'une thèse de Erdmann, Russell est néanmoins conduit à préciser le sens général qu'il donne à ces notions. Le philosophe allemand, qui suit sur ce point Riemann, soutient qu'il est possible d'associer une courbure (c'est-à-dire une quantité) aux principales variétés métriques. La critique de Russell est la suivante : les espaces qui n'ont pas la même courbure diffèrent qualitativement ; or toute comparaison quantitative suppose une identité qualitative (c'est le point décisif) ; il est donc impossible, contrairement à ce que suppose Erdmann, de comparer quantitativement différents espaces. L'argument russellien est tout entier fondé sur l'idée qu'une comparaison quantitative présuppose que les termes comparés possèdent une qualité commune. Mais cet

4. La distinction entre les deux géométries ne recoupe pas celle entre connaissance *a priori* et *a posteriori*. Pour Russell, les deux sous-disciplines sont *a priori*. Comme la géométrie projective, la théorie des « conditions qui rendent la mesure spatiale possible » (1897a, p. 146) n'est pas empirique — même si les axiomes d'une géométrie métrique particulière, à savoir la géométrie euclidienne, « détermine, à la marge d'erreur près, celle, entre [les] possibilités *a priori,* qui correspond à notre espace réel » (*Ibid.* p. 146).

argument ne va pas lui-même sans poser une difficulté. Russell veut-il dire que l'identité qualitative précède logiquement la possibilité d'une comparaison quantitative ? Ou bien souhaite-t-il seulement établir que la possession d'une qualité commune est toujours liée à une comparaison, sans se prononcer sur la priorité logique de la qualité par rapport à la comparaison ? Dit autrement, Russell exclut-il la possibilité de concevoir l'identité qualitative des termes comparés comme le résultat du jugement de comparaison ?

L'auteur de l'*Essay* semble très hésitant. Peu de textes sont explicitement consacrés au problème, et les passages qui le sont ne sont pas dénués d'ambiguïté :

> J'ai parlé, partout, du jugement de quantité comme d'un jugement de comparaison ; comment, alors, une quantité peut-elle être intrinsèque ? La réponse est que, bien que la mesure et le jugement de quantité exprime le résultat d'une comparaison, cependant, les termes comparés doivent exister avant la comparaison. [Par exemple], bien que la mesure des distances implique une référence aux autres distances et que leur expression comme grandeur requiert une référence de ce genre, leur existence ne dépend cependant d'aucune référence extérieure, mais exclusivement de la distance entre ces deux points (*ibid.* p. 163-164, note).

Si le jugement quantitatif est comparatif, l'attribution d'une quantité à une entité, explique Russell, est intrinsèque, c'est-à-dire ne dépend que des propriétés de l'entité et non de l'acte de comparaison. Cette affirmation paraît interdire l'idée que le jugement quantitatif « crée » quoi que ce soit — la grandeur ou la ressemblance qualitative. Pour autant, Russell admet que « l'expression [de la distance] comme grandeur » requiert une référence aux autres distances, c'est-à-dire un jugement de comparaison. Donc, si la distance entre deux points donnés ne dépend que de ces deux points, la distance « comme grandeur » est produite par la comparaison entre ce bipoint et d'autres. Comment, au final, comprendre la position de Russell ?

Avant de nous tourner vers le très important article paru dans *Mind* en 1897, *On the Relations of Numbers and Quantity* (Russell 1897c), il n'est pas inutile d'examiner comment le problème de la nature de la quantité se pose dans l'école idéaliste anglaise, à laquelle notre auteur se rattache alors explicitement. Dans l'*Essay*, Russell se réfère particulièrement aux analyses de Bosanquet, qui, dans le sillage de Hegel[5], consacre une partie importante de *Logic, or Morphology of the Knowledge* (1888), à l'élucidation des rapports entre jugement qualitatif et jugement quantitatif. Le disciple de Bradley développe une théorie des formes de jugement (conçu, à la façon de Bradley, comme la reconnaissance d'une identité dans la différence), inspirée par l'organicisme de Spencer, dans laquelle les jugements quantitatifs, parce qu'ils « ne différencient que des homogènes », forment un rameau divergent dans la classification des types de proposition[6].

---

5. Voir Hegel, 1830, p. 348-369.

6. Bosanquet, 1888, p. 91-93. L'étude de ces formes de jugement occupe les quatre premiers chapitres de son premier livre.

Pour Bosanquet, tout jugement quantitatif est contradictoire. En effet, une quantité est d'abord, selon lui, divisible en parties qui sont toutes des quantités indépendantes les unes des autres :

> Chaque pouce dans une mesure d'un yard, chaque balle de billard dans un tas, est ainsi distingué ; et si ce n'était pas le cas, les parties n'auraient aucune stabilité et la totalité quantitative cesserait d'exister (Bosanquet, 1888, p. 123).

La divisibilité et l'indépendance des quantités éléments garantit donc l'existence de la quantité comme totalité. Mais, en second lieu, toute « comparaison de degré suppose [...] que la différence [...] soit maintenue dans les limites d'une seule qualité[7] » (*ibid.*). Si ce n'était pas le cas, la comparaison deviendrait qualitative. Ainsi :

> Chaque nuance de rouge, en plus d'être un degré de rouge en général, est également une teinte particulière et produit une impression distincte (1888, p. 123).

Le jugement quantitatif exige donc, selon Bosanquet, de considérer les éléments comparés comme des termes indépendants et subsistants par soi ; mais il exige simultanément de les concevoir comme des instances d'une qualité commune, c'est-à-dire de ne pas penser les quantités comme subsistantes par soi. Autrement dit, tout élément indépendant d'une comparaison est une qualité ; mais la comparaison effectuée, le terme perd son indépendance et son aspect qualitatif pour devenir un degré. Les nuances de rouge, considérées comme différentes qualités, doivent être « jugées, une fois comparées, comme incomparables[8] » (1888, p. 124).

Selon Bosanquet, quantité et qualité ne peuvent donc être opposées et tenues séparées. Les deux concepts se présupposent l'un l'autre. Le philosophe est ainsi conduit, par un processus que l'on peut à bon droit qualifier de dialectique, à faire intervenir un troisième terme, la comparaison, censée fonder l'articulation du quantitatif et du qualitatif[9]. C'est précisément cette thèse

7. Voir également Russell, 1903, p. 171.

8. À comparer à Hegel, 1830, p. 532 : « La quantité n'est rien d'autre que la qualité supprimée ».

9. Dans les études russelliennes, l'hégélianisme est souvent convoqué pour expliquer (excuser ?) certaines thèses, jugées quelque peu saugrenues, du premier Russell. Même lorsque les œuvres des idéalistes britanniques sont évaluées de façon plus favorable (Hylton 1990), la référence à Hegel a (paradoxalement) souvent pour effet de couper Russell de l'histoire de la philosophie occidentale et de ses problèmes. Cette approche nous semble trompeuse, et la question étudiée illustre bien pourquoi. Le problème de la quantité a une très longue histoire, et Hegel n'est, de ce point de vue, que l'héritier d'une riche tradition qui remonte aux discussions médiévales sur la « latitude des formes ». En reprenant les distinctions établies par les médiévaux, on pourrait dire que Bosanquet (comme Hegel) thématise l'opposition entre une conception « additive » (selon laquelle une quantité est un agrégat de quantités plus petites) et une conception « qualitative » (selon laquelle la variation quantitative est une succession de formes différentes) de la quantité. Sur la pérennité de ces problématiques, voir les très éclairants articles de J.-L Solère (Solère 2000 et 2001) sur la façon dont Hegel (mais également Kant et Wolff) s'insère dans cette tradition ; voir plus particulièrement Solère, 2000, p. 482-487.

qu'exprime Bosanquet dans un passage (obscur lorsqu'il est tiré de son contexte) cité par Russell dans sa critique d'Erdmann :

> Nous sommes donc conduit à conclure que la comparaison quantitative n'est pas *prima facie* coordonnée avec la [comparaison] qualitative, mais plutôt qu'elle s'y substitue comme *effet de la comparaison de qualité*, qui en tant qu'elle est comparable *devient quantité*, et qui en tant qu'incomparable fournit la distinction entre parties essentielles à la totalité quantitative. [...] La différence entre le rouge et le vert, par exemple, n'est pas, pour la perception ordinaire, une différence dans la même qualité ; et si elle peut devenir mesurable, elle ne le peut que par référence à une qualité identique, telle que la luminosité, qui tombe en dehors des singularités du rouge et du vert en tant que telles (Bosanquet 1888, p. 124).

Quantité et qualité sont ici considérées comme deux moments indissociables du jugement de comparaison — deux quantités sont, en tant que distinctes, des qualités ; deux qualités différentes partagent, en tant que comparées, un genre commun qui les détermine comme degré. Dans cette dialectisation de l'opposition quantité/qualité, la notion de comparaison (Russell emploie parfois, en reprenant le vocabulaire hégélien, le terme de « mesure ») joue le rôle crucial. La comparaison est toujours le germe d'un jugement quantitatif pour autant qu'il pointe vers une espèce commune rassemblant les entités comparées ; en même temps, la comparaison n'est possible que si les termes comparés diffèrent qualitativement. Le problème posé par les jugements quantitatifs se déplace donc chez Bosanquet. À la question : « Qu'est-ce que la quantité ? », le disciple de Bradley substitue l'interrogation, non moins épineuse : « Qu'est-ce qu'une comparaison ? »[10].

2. Quantité et comparaison dans *On the Relations of Numbers and Quantity*

Dans *On the Relations of Numbers and Quantity*, Russell revient sur le concept de grandeur et soutient que la quantité n'est pas une propriété d'une certaine qualité, mais une « catégorie de la comparaison ». L'article se divise en trois moments. Russell s'attaque d'abord à la thèse qui assimile les degrés à des propriétés ; il critique ensuite la conception selon laquelle les degrés sont des catégories purement sensibles, qui échappent à toute détermination conceptuelle ; il conclut en définissant la quantité comme un concept relationnel. Examinons brièvement les différentes étapes du raisonnement.

C'est Couturat que Russell prend d'abord pour cible. Dans *De l'infini mathématique* (1896, p. 367-375), le philosophe français critique le projet de Helmholtz consistant à définir la grandeur comme l'ensemble des choses pou-

10. Bosanquet établit une différence entre qualité (*quality*) et genre (*kind*) ; voir (1888, p. 123-127). Le genre est un produit de la classification, alors que la qualité est donnée dans la perception. Mais cette distinction n'élimine pas le problème soulevé par Russell (la qualité est-elle engendrée par la comparaison ou bien la comparaison ne peut-elle se développer que si une qualité commune est partagée par l'ensemble des termes comparés ?).

vant « être dites égales ou inégales à une autre ». Au lieu de définir de façon circulaire la grandeur « par sa comparaison avec d'autres », Couturat cherche à la caractériser par un attribut intrinsèque et indéfinissable « que possède chaque grandeur isolément » (1896, p. 368). Russell entreprend de montrer, contre Couturat, que penser la grandeur comme une propriété conduit à des contradictions insurmontables.

Il commence par distinguer le cas où la différence entre deux quantités du même genre est une quantité de ce genre (la quantité est alors dite extensive), du cas où il n'en est rien (la quantité est alors dite intensive). Dans cette dernière hypothèse, la différence entre deux degrés ne peut pas être conçue comme une qualité, car, comme Bosanquet l'a indiqué, si c'était le cas, chaque intensité deviendrait une propriété particulière, et la variation quantitative se transformerait en changement qualitatif[11]. Ne pouvant ni être décrite comme une qualité ni comme une quantité, la différence entre deux quantités intensives ne peut plus du tout être conçue — elle existe pourtant, car de deux plaisirs, par exemple, l'un peut être dit plus grand qu'un autre. Concevoir la quantité comme une propriété interdit donc de comprendre ce qu'est la quantité intensive[12].

Mais l'approche de Couturat rend également inintelligible la notion de quantité extensive. Russell, suivant encore une fois Bosanquet, adhère en effet à une conception « additive » de la quantité extensive[13], selon laquelle chaque quantité déterminée est un agrégat (Russell dit « totalité ») de quantités extensives plus petites. Ainsi : « La quantité extensive est toujours susceptible d'être divisée en quantités extensives, qui sont donc à leur tour divisibles. Cela conduit à la divisibilité infinie » (Russell 1897c, p. 75).

Or cette propriété d'infinie divisibilité, que la grandeur extensive partage avec l'espace et le temps, est, à l'époque, pour Russell, la manifestation d'une contradiction, « la contradiction de la relativité », qui provient de l'opération consistant à subsumer une même et unique chose sous les catégories incom-

11. Les nuances de rouge seraient alors, comme chez Bosanquet, des rouges différents, et plus rien n'assurerait l'appartenance à un genre commun permettant une évaluation quantitative.

12. Russell, 1897c, p. 77-78 : « deux quantités intensives du même genre sont, en ce qui concerne les propriétés conceptuelles qui peuvent être attribuées à chacune isolément, complètement identiques ; la différence de quantité est en conséquence une différence de propriété qui ne paraît pas exister avant la comparaison (*is a difference in a property which appears not to exist before comparison*). [...] Cela semblerait réduire la quantité intensive à une relation entre deux termes, et cependant, en affirmant qu'un terme est plus grand qu'un autre, nous affirmons catégoriquement — comme nous l'avons admis au début de notre analyse — que chacun a séparément une quantité. »

13. Russell, 1887c, p. 75 : « Une quantité est extensive lorsqu'un changement en elle est une quantité de la même espèce. De cette définition, nous pouvons [...] dériver toutes les propriétés ordinaires de la quantité extensive. En premier lieu, nous avons l'addition (et la soustraction). [...] Lorsque deux quantités sont, ensemble, [...] égales à une troisième, chacune des deux est dite être une part de la troisième. »

patibles de l'adjectif et du substantif. La quantité extensive, dans la mesure où elle est variation entre deux quantités, est simplement l'attribut d'une entité ; mais dans la mesure où la grandeur extensive a des parties et est une totalité, elle est une chose. Chaque grandeur particulière, considérée comme un substantif, est un agrégat d'éléments ; mais comme chacune de ses grandeurs éléments peut être elle-même conçue comme un substantif, aucun élément simple ne peut jamais être distingué. Donc, puisqu'« une chose complexe doit être composée de choses simples », le seul fait de penser la quantité et la variation quantitative comme une propriété (même si ladite propriété n'est pas définie) conduit inévitablement à la contradiction, et doit, pour cette raison, être rejeté.

Notre but n'est pas ici d'évaluer l'argumentaire russellien ou de discuter les nombreuses présuppositions laissées dans l'ombre. Notre propos est plutôt de montrer comment, dans cet article, Russell oppose à Couturat les éléments de la doctrine hégélienne de la quantité exposés par Bosanquet (qu'il cite d'ailleurs à la fin de son développement). Russell, s'il reformule[14] et affine[15] l'analyse du philosophe idéaliste, n'en modifie pas les grandes lignes. On aurait tort, pour autant, de considérer la confrontation avec Couturat comme l'occasion d'une simple répétition des positions de l'*Essay*. Au cours de la discussion, Russell est, pour la première fois, conduit à thématiser pour elle-même la notion de comparaison. La comparaison n'est plus ici conçue comme une « opération » de l'esprit, mais comme une nouvelle forme de catégorie logique, non réductible à la propriété. Cette avancée importante est très clairement manifestée dans le second et le troisième moment de l'analyse russellienne. Ayant montré que la grandeur n'est pas un prédicat que chaque quantité possèderait isolément, Russell repousse l'hypothèse, pourtant fort naturelle, consistant à considérer la différence de degré comme une différence purement sensible, non conceptuelle. Le philosophe invoque, pour ce faire, un argument proposé par Poincaré dans « Le continu mathématique » paru dans la *Revue de métaphysique et de morale* en 1893[16] :

> Si la quantité était de nature sensible, deux quantités qui engendrent des sensations indiscernables devraient être égales. Or les plus petites différences perceptibles entre des sensations sont finies, de sorte qu'aucune raison ne peut expliquer, si la quantité est sensible, la création du continu. Il y a cependant une raison au continu. Supposons trois sensations *A*, *B*, *C* telles que *A* est inscernable de *B*,

14. Considérer la quantité comme un adjectif (opposer quantité et qualité), c'est s'interdire de concevoir la quantité comme une totalité constituée de parties ; au contraire, penser la grandeur comme une chose, c'est s'interdire toute possibilité de jugement quantitatif et faire disparaître l'espèce commune, socle de la comparaison quantitative.

15. Notamment en distinguant la quantité extensive de la quantité intensive. Mais, pour un hégélien, la distinction entre grandeur extensive et intensive doit être elle-même relativisée ; voir Hegel, 1830, p. 536-538.

16. Il s'agit du texte repris dans le second chapitre de *La science et l'hypothèse,* 1902.

> *B* indiscernable de *C*, mais non *A* de *C*. Alors, nous avons nécessairement, en nous fondant sur une base purement sensible :
>
> $A = B, \quad B = C, \quad A \neq C.$
>
> Pour éviter la contradiction, nous devons supposer que *B* n'est pas égal à *A* et *C ;* nous avons abandonné, avec cette hypothèse, la thèse du caractère purement sensible de la quantité. [...] L'idée de quantité continue, de série ordonnée procédant par graduation infinitésimale, est ainsi un produit de la pensée. Les quantités peuvent être données par les sens, mais elles deviennent quantité seulement par un acte de l'esprit (1897c, p. 79).

Aucune variation quantitative continue n'est donnée dans l'expérience — ce qui signifie que la grandeur conçue comme « série ordonnée procédant par graduation infinitésimale » est un concept, non une intuition sensible. La quantité doit donc être considérée comme une forme conceptuelle[17]. Or Russell vient de rejeter la possibilité de concevoir la quantité comme une propriété. Ce refus, qui s'accompagne du désir de maintenir la variation quantitative dans le giron de l'intelligible, conduit donc inévitablement à introduire des formes conceptuelles relationnelles.

Et c'est bien à quoi s'attache la dernière partie de la démonstration russellienne :

> La quantité est donc conceptuelle, mais n'est pas une propriété intrinsèque des choses quantitatives. Dans ces circonstances, quelle peut être la nature de la quantité ?
>
> [...] La quantité n'est pas une propriété commune des choses quantitatives, pas plus que la similarité est une propriété commune des choses similaires. La quantité est une conception de relation, de comparaison ; elle exprime la possibilité d'un certain genre de comparaison avec autres choses. [...] Dans *une* quantité, considérée en isolation, il est impossible de découvrir [...] une quelconque propriété de la quantité. *Une* quantité est à vrai dire une expression aussi impropre pour des choses qui peuvent être quantitativement comparées qu'*une ressemblance* l'est pour une photographie. [...] La vérité de la quantité est donc — pour employer une tournure hégélienne — la mesure (1897c, p. 79-80).

---

17. L'analyse de Russell n'est pas nouvelle. Comme nous l'avons fait remarquer, elle reprend, sans probablement que l'auteur le sache, des distinctions qui traversent les discussions médiévales sur la latitude des formes. J.-L Solère montre ainsi qu'une des principales oppositions concerne le statut qu'il faut accorder aux variations quantitatives : la variation appartient-elle seulement aux substrats sensibles, comme le pensait Aristote et comme le prétend encore Saint Thomas, ou bien affecte-t-elle les formes elles-mêmes, comme le pensent les « latitudinistes » ? Voir Solère, 2000, p. 459-463. Ce clivage est encore plus profond que celui entre partisans d'une théorie additive et partisans d'une théorie qualitative de la grandeur (voir note *supra.*), ces deux dernières doctrines étant toutes deux « latitudinistes ». Russell, replacé dans ce cadre, occupe une position singulière : la quantité appartient à la forme, non au sensible ; mais conçue comme une forme prédicative, la quantité est contradictoire et inintelligible.

La quantité est une catégorie, elle est de l'ordre du concept. Mais parce qu'elle n'est pas une propriété, il est possible de maintenir que, même si aucun prédicat ne distingue deux quantités du même genre, celles-ci diffèrent conceptuellement. Dans « un jugement sur le plus et le moins, on a affaire à un concept de différence qui n'est associé à aucune différence dans le concept (*we have a conception of difference without a difference of conception*) » (1897c, p. 81).

Comme le montre la conclusion de *On the Relations of Numbers and Quantity*, la catégorie de la relation n'est cependant pas encore, en 1897, considérée par Russell comme une forme conceptuelle à part entière. Si la mesure (entendue comme comparaison) élimine les difficultés liées à la définition de la quantité comme propriété, une contradiction demeure, affectant la notion même de comparaison :

> Bien que la comparaison quantitative soit conceptuelle, les termes comparés ne doivent avoir entre eux aucune différence conceptuelle. Ils doivent différer, mais non pas dans les conceptions qui leur sont applicables. [...] Bien que les instances [des *infimae species* que sont les espèces de quantité] ne puissent différer sur le plan conceptuel, la comparaison manifeste pourtant des différences parmi elles. [...] Mais si la pensée était adéquate à ces données, un concept différent s'appliquerait à chacune : reconnaître que ce n'est pas le cas, c'est reconnaître que la distinction est inintelligible (1897c, p. 82).

Bien que la quantité soit un concept, sa raison d'être, sa nécessité provient « de l'inadéquation persistante de la pensée aux sens, ou, si l'on préfère, de la fondamentale irrationalité des sens », qui conduit à distinguer ce qui est notionnellement identique. Dans un texte légèrement plus tardif[18], Russell reprend ce thème en opposant le cas de la quantité, dans lequel un concept de différence n'est associé à aucune différence dans le concept, au cas de la qualité, où une différence dans le concept (entre des qualités) n'est liée à aucun concept de différence (aucune mesure de cette différence n'est possible). La catégorie de relation n'est pas encore conçue comme un concept achevé, mais comme le lieu d'une tension dialectique entre deux pôles, qualité et quantité, eux-mêmes traversés par l'opposition entre la pensée (le médiatisé) et le sensible (l'immédiateté). La relation « grandeur » est alors encore définie comme une médiatisation de l'immédiateté (une conceptualisation du sensible) — non comme une forme stable de médiatisation (comme une forme conceptuelle à part entière).

---

18. Russell, 1896-1899, p. 25 : « Cette antithèse suggère que quantité et qualité sont des côtés opposés, qui doivent être combinés dans la réalité. Un monde de pures catégories contient une contradiction qui est la contrepartie exacte de celle contenue dans un monde de pures quantités. Nous semblons avoir besoin, pour l'élimination de ces deux contradictions, d'une forme de synthèse, d'une forme de quantités catégoriques ou de catégories qualitatives. Il ne paraît pas impossible que cela puisse être effectué par l'introduction graduelle de médiation dans cette immédiateté qui constitue l'essence des quantités. Pouvons-nous dire : la qualité est la médiation immédiatement donnée, alors que la quantité est l'immédiateté médiatisée ? »

Il faudra attendre 1899, c'est-à-dire la réception de l'article de Moore et la lecture de Leibniz, pour trouver, dans une conférence intitulée *The Classification of Relations*[19], l'affirmation selon laquelle les propositions (même prédicatives) sont essentiellement relationnelles. L'exemple que Russell donne de relations réellement « relationnelles » (c'est-à-dire asymétriques, irréductibles à la possession partagée de prédicats) est la relation de plus et de moins (*greater and less*), caractéristique de la quantité. Le lien est ainsi fait avec *On the Relations of Numbers and Quantity*, qui, malgré ce qui paraît après-coup comme des insuffisances, engage déjà très profondément la pensée russellienne dans la voie conduisant à étendre aux formes relationnelles la sphère de l'intelligible.

3. La réception de *Universal Algebra* et le schématisme vectoriel[20]

Dans les études russelliennes, l'opposition entre la période idéaliste (1897-1899) et celle, réaliste, qui la suit (1899-1903), constitue généralement une clé de lecture fondamentale. Et il est vrai que le développement de la nouvelle logique des relations coïncide avec un tournant méthodologique. Alors que Bradley, comme l'auteur de l'*Essay* lui-même, fondait le développement de la pensée sur la rencontre et le dépassement dialectique de contradictions, Russell, à partir de 1901, souligne le fait que tous les pseudo-paradoxes idéalistes s'évanouissent dès lors que l'on admet des formes relationnelles. Cependant, même dans sa période idéaliste, Russell affirme que certains paradoxes sont « évitables » et peuvent se résoudre par une analyse conceptuelle plus fine[21] ; ainsi en va-t-il, justement, des difficultés liées à la grandeur, que nous avons examinées. Il convient donc de compléter l'image habituelle, avant tout méthodologique, de l'évolution de Russell, par un examen des problèmes « substantiels » rencontrés par le philosophe. La notion de comparaison, fondamentale dans la théorie de la quantité à l'époque, joue à cet égard un rôle central : ancêtre du concept de relation, elle assure, à travers tous les bouleversements, une forme de continuité. Il n'y a pas, tout au moins à première vue, une si grande distance entre l'idée développée en 1897, selon laquelle « la vérité de la quantité, c'est la comparaison », et l'approche défendue en 1903, selon laquelle la vérité de la grandeur, c'est l'ordre[22].

Une étude plus attentive du contenu des manuscrits datant de 1898-1899 et de la théorie mature (que l'on trouve exposée aussi bien dans la partie III des *Principles* que dans *Sur la logique des relations,* publié dans la *Rivista* de Peano, en 1901) conduit toutefois à qualifier cette première conclusion.

19. Le texte est publié dans le second volume des *Collected Papers* (*Papers 2*, p. 138-146).

20. Pour plus de précision sur cette réception, nous nous permettons de renvoyer à Gandon, 2004.

21. Voir Russell, 1896-98, p. 24, où le philosophe distingue les contradictions évitables des contradictions inévitables.

22. Dans les *Principles*, Russell substitue au concept de quantité (partie III) la notion d'ordre (partie IV).

Avant de lire les mathématiciens italiens, Russell cherche en effet dans les algèbres grassmaniennes présentées par Whitehead le pendant mathématique des analyses philosophiques qu'il consacre à la grandeur. Ce n'est qu'après avoir pris connaissance des travaux de Peano et de ses disciples (notamment de Burali-Forti) que le philosophe trouve, dans la logique des relations, le moyen de construire un formalisme ajusté à sa doctrine relationaliste de la quantité. Autrement dit, si le discours philosophique au sujet de la grandeur reste peu ou prou le même, les théories mathématiques élaborées par Russell sur la période, changent, elles, considérablement. Nous allons, dans cette section, analyser brièvement les tentatives russelliennes pour ajuster les calculs géométriques hérités de Grassmann aux développements philosophiques de *On the Relations of Numbers and Quantity*.

Repartons de l'analyse proposée dans l'*Essay*. Pour Russell, alors, deux quantités ne diffèrent entre elles que sur fond d'identité qualitative ; deux entités ne sont comparables quantitativement l'une à l'autre qu'à l'intérieur d'une même série. Le formalisme vectoriel, élaboré par Grassmann et repris par Whitehead dans la partie III de son *Universal Algebra*, s'accorde parfaitement à cette approche. À un vecteur (Whitehead dit « extraordinaire ») donné, il est possible d'associer un scalaire (dans le cas qui nous intéresse, un nombre réel) quelconque. Ainsi une quantité ξ_1, représentant par exemple une masse, peut être liée à un extraordinaire e_1, habituellement interprété par Whitehead comme indiquant la position d'un point[23]. L'identité qualitative est ici représentée par le vecteur e_1 ; la variation quantitative est donnée par la variation des coefficients réels de l'extraordinaire. Une série se présente bien ainsi spontanément comme une variation (de la grandeur scalaire) dans certaines limites (la grandeur vectorielle, correspondant ici à un point de l'espace projectif, doit rester la même). Le symbolisme vectoriel incarne donc naturellement une conception de la grandeur qui juxtapose, sans les articuler, ce qui relève du quantitatif (le scalaire) et ce qui relève du qualitatif (le vecteur)[24]. La dualité scalaire/vecteur donne très naturellement une facture formelle à la

23. L'élément e_i représente, dans la partie III de *Universal Algebra*, un point de l'espace projectif (et non un vecteur comme dans les interprétations courantes aujourd'hui) — à ce point, Whitehead associe une intensité ou une « masse », le nombre α. Le lecteur pourrait légitimement se demander pourquoi nous parlons de vecteur là où Whitehead parle de point. Même s'il n'emploie pas cette terminologie, le mathématicien se place en réalité dans le cadre d'un espace vectoriel V de dimension $n+1$ (la base de ce que Whitehead nomme « multiplicité positionnelle » contient $n+1$ extraordinaires indépendants) sur lequel il définit (par « quotientage ») l'espace projectif de dimension n des droites vectorielles de V. Ainsi, la droite $(e_i$ correspond au même point projectif, quel que soit α – et l'intensité représente donc une propriété extra-géométrique, celle de masse. Nous sommes donc bien fondé à parler de vecteur ici : la définition de l'espace projectif s'effectue, comme c'est encore le cas aujourd'hui, par le biais des espaces vectoriels. De surcroît, plus tard dans *Universal Algebra* (livre VII), Whitehead donne l'interprétation vectorielle courante des mêmes multiplicités positionnelles.

24. Whitehead invite d'ailleurs lui-même à une telle lecture, « métaphysique », des structures qu'il met en place. Il écrit ainsi (1898, p. 14-15) : « On gagne en brièveté en consi-

dualité quantité/qualité (pensons à la façon dont, au collège, la masse est représentée par des flèches verticales de différentes longueurs attachées à un corps)[25].

On a vu cependant que, dans son article de 1897, Russell, s'inspirant de Bosanquet, complexifiait le schéma, perçu comme trop statique, dont il est ici question. Une quantité (un degré de rouge) peut devenir une qualité (un rouge), et une qualité (le rouge) peut être conçue comme une quantité (le rouge comme un degré dans l'échelle du spectre). Ce mouvement philosophique de dialectisation des oppositions a-t-il un écho sur le plan mathématique ? Dans les manuscrits datant de 1898-1899, on trouve plusieurs textes, « expérimentaux », dans lesquels Russell cherche à donner une version mathématique de la dialectique de la grandeur. Nous n'en donnerons qu'un exemple, tiré de la quatrième partie du manuscrit *On Quantity and Allied Conceptions*, datant de 1898 :

> Il faut observer que *chaque* élément de la multiplicité (positionnelle)[26] a une qualité unique, différente de celle de n'importe quel autre élément. [...] Les extraordinaires e_1, e_2, ..., e_ν ne sont pas des quantités, mais leurs différences sont des quantités. Si nous désignons ces différences par $e_2 - e_1$, etc..., alors $e_2 - e_1$ est l'unité pour ce genre de différence qualitative qui existe entre e_2 et e_1. Si la quantité de cette différence par rapport à e_1 est ξ_{12}, nous aurions à ajouter $\xi_{12}(e_2 - e_1)$ de cette différence pour obtenir le nouvel élément. Ainsi, n'importe quel élément (est de la forme) $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1) + \ldots + \xi_{1\nu}(e_\nu - e_1)$, ou $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_\nu e_\nu$.

Russell, en accord avec Whitehead, commence par affirmer que les extraordinaires sont des qualités, qui varient selon l'intensité. Mais il poursuit : la différence entre deux extraordinaires e_1 et e_2 engendre une nouvelle « entité qualitative » $e_2 - e_1$ (un « genre de différence qualitative ») susceptible de variation quantitative. Ainsi, $e_2 - e_1$ est à la fois une direction (une qualité), et une unité (une quantité) que l'on peut multiplier par un scalaire pour repérer n'importe quel point de la droite : à e_1, on peut ajouter une quantité ξ_{12} de la différence qualitative $e_2 - e_1$ pour indiquer un élément quelconque

---

dérant chaque élément de la multiplicité, *A* (par exemple), comme contenant en lui la multiplicité entière de ses propriétés secondes. Ainsi, [...] la notation *A* représente n'importe quel A_1, A_2, A_3, etc., où le suffixe désigne le mode particulier de la propriété seconde. [...] La seule propriété seconde dont nous parlerons dans ce livre est l'intensité. » Les suffixes ajoutés à *A* correspondent précisément aux scalaires accolés aux grandeurs vectorielles dans les calculs géométriques. L'opposition entre propriété principale de la multiplicité et propriétés secondes des éléments recoupent donc bien l'opposition entre qualité et quantité.

25. Il nous semble que les oppositions doctrinales sur la grandeurs, héritées des querelles médiévales, peuvent être reconduites à l'égard des vecteurs, qui sont des « formes » variables. On pourrait ainsi soutenir que la variation est extérieure aux extraordinaires, ou au contraire qu'elle est interne aux formes ; et dans cette seconde situation, tenter de la comprendre en tant qu'addition de vecteurs, ou au contraire tenter de penser le changement comme une transformation de l'extraordinaire lui-même.

26. « Multiplicité positionnelle » ou « calcul positionnel » est le terme que Whitehead emploie pour désigner ce que nous appelons espace vectoriel. Voir note *supra*.

de la droite (e_1e_2)[27]. Cette analyse rompt avec l'ancien schéma qui n'attribuait de quantité qu'à une qualité préalablement identifiée. Dans le calcul présenté, il est possible d'additionner deux qualités pour créer une nouvelle qualité.

Dit autrement, Russell voit dans le formalisme grassmannien une méthode générale permettant d'engendrer des qualités. Ainsi, à partir des qualités de « position » $e_1, e_2, \ldots$, il est possible, en les soustrayant l'une l'autre, de faire naître une nouvelle forme qualitative, « directionnelle », $e_2 - e_1$. Et la méthode est étendue par Russell : de même que l'on peut créer, à partir de la série des masses attribuées à un point, la série des points sur une droite, de même on peut engendrer, à partir de cette dernière, par une opération analogue, la série des droites dans un faisceau[28]. À chaque fois, ce qui apparaît comme une qualité (une position, une droite) à un certain niveau, est perçu, au niveau supérieur, comme un degré dans une nouvelle série qualitative (série des points sur une droite, série des droites dans un faisceau) — exactement comme chez Bosanquet, où une nuance de rouge perçue d'abord comme qualitativement distincte de toutes les autres, était, à un autre niveau, conçue comme un degré d'une même qualité, le rouge. Les multiplicités positionnelles constituent donc, selon Russell, non pas une juxtaposition statique de considérations qualitatives et quantitatives, mais une nouvelle articulation dialectique et hiérarchisée de différents types de qualité (les points, les directions, les angles plans, ..., etc.). Le philosophe retrouve donc dans le calcul grassmanien des éléments de l'analyse idéaliste de la quantité : chaque terme de l'opposition entre qualité et quantité devient son opposé.

---

27. L'opération consistant à former la somme de deux « extraordinaires » dont la somme des coefficients est nulle joue un rôle considérable chez Grassmann et ses successeurs, notamment chez Whitehead (1898) et chez Peano (1888 et 1896). Toute « forme de première espèce », c'est-à-dire toute somme de (deux) points multipliés par leur scalaire peut être interprétée, dans le sillage de Möbius, comme le barycentre du système formé par (deux) masses positionnées en chacun des points. Ainsi, « $e_1 + e_2$ » désigne le milieu des points e_1 et e_2. Lorsque e_1 et e_2 ont des coefficients qui s'annulent, comme dans $e_2 - e_1$, aucun point sur la droite affine (e_1e_2) n'est indiqué. Grassmann associe alors l'expression « $e_2 - e_1$ » à un « déplacement » (*Strecke*), dont la position est le point à l'infini sur (e_1e_2), et qui correspond à la direction de la droite affine (Grassmann 1862, p. 131-133). Autrement dit, le calcul sur les « points » (les qualités) engendre une nouvelle espèce d'objets, les déplacements (un nouveau type de qualité) sur lesquels il est possible, dans un second temps, d'effectuer le même genre d'opération pour engendrer un nouveau type de grandeur ; et ainsi de suite. Whitehead et Peano, chacun à leur manière, systématiseront cette idée très féconde.

28. Voir 1898d, p. 349 : « Soient e_1, e_2 deux points différents. Alors la différence de position peut être désignée, bien que e_1 et e_2 ne soient pas des quantités, par $e_2 - e_1$. [...] Maintenant, $e_2 - e_1$ est une unité, dont on peut considérer n'importe quel multiple. [...] Si ξ_{12} est un multiple numérique, n'importe quel point de la série déterminée par e_1 et par e_2 est $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$. Soit maintenant e_3 un troisième point. Alors $e_3 - e_1$ diffère qualitativement de $e_2 - e_1$, mais la différence est une quantité. [...] N'importe quel point de la série déterminée par e_3 et e_1 est $e_1 + \xi_{13}(e_3 - e_1)$. La différence entre [ce point] et un point de e_1e_2 est $\xi_{13}(e_3 - e_1) - \xi_{12}(e_2 - e_1)$. Ainsi, une série complète de lignes droites passant par e_1 est déterminée par la différence entre $e_3 - e_1$ et $e_2 - e_1$. La qualité de n'importe quelle ligne droite de cette série est $e_2 - e_1 + \eta_{23}\{(e_3 - e_1) — (e_2 - e_1)\}$ ou $e_2 - e_1 + \eta_{23}(e_3 - e_2)$. » Pour un commentaire, voir Gandon, 2004.

Reste que les relations, dont Russell affirme dans *On the Relations of Numbers and Quantity* qu'elles sont le socle et la vérité de la quantité, sont absentes dans les formalisations vectorielles. Dans les multiplicités positionnelles, quoi qu'en dise Russell, la série se symbolise sous la forme d'une juxtaposition d'un nombre et d'un extraordinaire : $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$ — où ξ_{12} est un scalaire variable et $(e_2 - e_1)$ un vecteur constant. Aucune relation n'apparaît ici. Que les expressions vectorielles puissent être réorganisées de façon à manifester la corrélation entre les divers types de séries est une chose — que le calcul positionnel ne soit pas tout entier fondé sur la distinction primitive entre scalaires (quantités) et extraordinaires (qualités) en est une autre, qu'il est impossible de négliger. L'opposition entre quantité et qualité est bien inscrite au cœur des algèbres vectorielles et demeure indépassable. Et que Russell parle, à partir de 1899, de série plutôt que de quantité embrouille les choses au lieu de les éclairer, puisqu'une série se conçoit alors comme la combinaison d'une quantité variable et d'une qualité constante, et non pas comme une relation d'un certain type. Malgré les tentatives de donner un pendant mathématique à la dialectique de la grandeur, il y a donc, à cette époque, un écart important entre l'analyse philosophique et la pratique mathématique russellienne.

Comment donc réajuster le calcul à la prose ? Russell doit-il modifier, affiner, corriger son analyse philosophique de la grandeur pour penser de façon plus précise les multiplicités positionnelles ? Ce n'est pas dans cette voie que le philosophe va s'engager. Au lieu d'adapter sa prose au calcul, Russell va, comme nous allons maintenant le voir, chercher à donner une version relationnelle du formalisme vectoriel.

4. La grandeur mesurable

Le détour par *Universal Algebra* nous a appris que les questions concernant la nature de la quantité ne sont pas simplement philosophiques mais possèdent, chez Russell, un versant mathématique. Le calcul positionnel grassmanien occupe, de ce point de vue, une position ambiguë. S'il juxtapose, en son fondement, détermination quantitative et qualitative, son développement permet de dialectiser ce qui était d'abord opposé. Cependant, la définition de la grandeur comme catégorie relationnelle, développée par Russell dès 1897, ne trouve, dans les algèbres vectorielles, aucune traduction symbolique. Le questionnement sur la nature des grandeurs se double donc chez Russell d'une dimension proprement syntaxique : comment rendre visible, dans les structures présentées par Whitehead, la présence des relations ? C'est dans la partie III des *Principles* (intitulée « *Quantity* »), mais également dans la première version anglaise de *Sur la logique des relations* (plus complète que celle publiée dans la *Rivista*), que Russell affronte le problème. La démarche du philosophe étant à la fois intriquée et peu connue, nous avons choisi de présenter d'abord le cadre général de l'analyse développée dans la partie III des *Principles*. Nous réservons à la prochaine section l'examen de la construction relationnelle du symbolisme vectoriel.

Russell (1903, p. 159) commence par critiquer la façon « commune » de définir la quantité comme série divisible. Les deux déterminations de sérialité et de divisibilité n'étant pas toujours réunies (il y a des grandeurs sérielles non divisibles et des entités divisibles qui ne forment pas une série), il choisit de caractériser la quantité par la seule sérialité. Cette première décision doit être rapprochée d'une autre distinction établie entre grandeur et quantité :

> Nous avons besoin d'une distinction [...] entre le genre de termes qui peuvent être égaux et le genre de termes qui ne peuvent être que plus ou moins grands. Les premiers, je les nomme *quantités* ; les seconds *grandeurs*. Une règle réelle est une quantité ; sa longueur est une grandeur. Les grandeurs sont plus abstraites que les quantités : lorsque deux quantités sont égales, elles ont la même grandeur (Russell 1903, p. 159).

Les quantités sont les choses concrètes (le plus souvent, spatio-temporelles) auxquelles sont attribuées les grandeurs ; si deux segments sont superposables, c'est que les deux quantités ont la même grandeur. Il n'y a ainsi pas d'égalité entre grandeurs, alors qu'il y en a entre quantités. Russell établit cette distinction parce que, selon lui, la grandeur n'est, à proprement parler, pas divisible ; par contre, et nous reviendrons bientôt sur cette idée importante, certaines quantités le sont[29].

Définir la *magnitude* par la sérialité, c'est, étant donné la conception de l'ordre développée dans la partie IV des *Principles*[30], introduire les relations au cœur de la théorie de la grandeur[31]. On pourrait donc croire la tâche achevée : en définissant la grandeur comme série, Russell manifesterait le lien établi sur le plan philosophique, dès 1897, entre quantité et relation. L'affaire est cependant beaucoup plus complexe. Définir la quantité par l'ordre laisse non résolu le problème de la mesure, c'est-à-dire le problème de savoir comment des nombres peuvent être associés à des grandeurs. Bien sûr, certaines quantités (certaines séries) ne sont pas mesurables ; mais des quantités le sont, et la difficulté, pour Russell (elle était déjà la sienne lorsqu'il analysait le calcul vectoriel grassmannien), est de saisir l'articulation entre nombre et grandeur (entre scalaire et extraordinaire) que ces cas exposent. Comme l'explique le philosophe :

> Ce dont nous avons besoin, c'est de trouver un sens à l'expression qu'une grandeur est le double d'une autre. [...] Ainsi, la mesure requiert que, dans cer-

---

29. Russell, 1903, p. 173-174.

30. Comme il est bien connu, les séries sont conçues par Russell comme des ensembles ordonnés par une relation asymétrique et transitive (1903, p. 207-217).

31. Russell affirme d'ailleurs qu'« il aurait été [...] naturel de discuter de l'ordre avant de discuter de la quantité » (*ibid.* p. 158), et que s'il ne le fait pas, c'est seulement par concession à la tradition.

tains cas, il y ait une signification intrinsèque à la proposition « cette grandeur est le double de celle-ci » (Russell 1903, p. 177-178).

Le plus dur n'est pas, dans le cadre de la logique des relations, de donner un sens à l'expression « A est plus grand que B », mais de définir ce que signifie « A est deux fois plus grand que B », ou encore, en faisant apparaître la structure additive, « $A = B + B$ »[32].

Avant de décrire la façon dont Russell relève le défi, examinons quelle est, du point de vue « technique », la difficulté. Aujourd'hui, on distinguerait la notion d'ensemble totalement ordonné (qui correspond au concept russellien de grandeur) de celle de demi-groupe ordonné dont tous les éléments sont réguliers (qui correspond au concept de grandeur mesurable). Γ est un ensemble de grandeurs mesurables non orientées si et seulement si :

1. Γ est un ensemble ;
2. Γ est muni d'une loi interne, appelé addition, commutative, associative, et qui admet un élément neutre — la « grandeur » nulle ;
3. $A, B \in \Gamma$, $A<B$ si et seulement s'il existe $C\neq 0$, tel que $A+C = B$;
4. $A, B \in \Gamma$, $A+X = B+X$ implique A=B

Un cinquième axiome, l'axiome d'Archimède, également énoncé par Russell, est requis pour pouvoir définir les mesures irrationnelles :

5. Pour tout U, $X\in\Gamma$, tel que $U\neq 0$, il existe un entier n tel que $nU>X$.

Lorsqu'il satisfait ces cinq conditions, Γ est un demi-groupe ordonné archimédien dont tous les éléments sont réguliers[33]. Il est possible, par symétrisation, de compléter Γ pour obtenir un groupe abélien G, appelé grandeurs orientées. On montre alors qu'une unité étant déterminée, et la structure d'ordre ainsi que la structure algébrique de G étant conservée, l'on ne peut associer que d'une seule manière un élément x de G à un nombre réel, la mesure de x[34]. Cette construction est, en substance, celle présentée en 1898 par Burali-Forti, dans un article intitulé *Les propriétés formales des opérations algébriques*, que Russell a étudié de près[35].

---

32. J. Michell (1999, p. 111-121), qui accorde une place importante à la conception russellienne de la grandeur, prétend que l'apport de Russell consiste à avoir pensé la quantité en termes de série, c'est-à-dire de relation. Nous sommes en désaccord sur ce point avec le commentateur. Russell ne se contente pas de ce résultat, trivial pour lui. Il veut expliquer, à l'aide de la théorie des relations, comment des grandeurs, c'est-à-dire des séries, peuvent être mesurées.

33. Voir Lelong-Ferrand Arnaudiès, 1972, p. 22-24.

34. En terme précis (*ibid.*, p. 24-25) : on montre qu'il n'existe qu'un seul homomorphisme strictement croissant de G dans l'ensemble des réels qui associe une grandeur quelconque U à 1. Quel que soit X de G, on appelle mesure de X, relative à la grandeur unité U, la valeur de X par l'homomorphisme en question. Ce théorème de « représentation » est appelé (par exemple Fuchs, 1963) théorème d'Hölder, du nom du mathématicien qui le démontre (dans Hölder, 1901).

35. Les articles de Burali-Forti (1898) et de Hölder (1901) font partie d'un ensemble de textes, tous écrits entre 1890 et 1910, qui visent à produire une théorie unifiée et axiomatisée de la grandeur mesurable ; Huntington (1902) propose une bibliographie des divers travaux consacrés à la question.

Il est à présent possible de clarifier le problème auquel le philosophe se confronte. Ce que Russell souhaite élaborer, ce n'est pas une théorie de l'ordre (il en possède déjà une), mais une théorie de la mesure, c'est-à-dire de l'addition ou de la structure de groupe compatible avec la structure d'ordre[36]. Comment, à partir de la notion de série de grandeurs, dériver un concept d'addition possédant les propriétés requises ?

Russell donne deux réponses à cette question dans les *Principles*. La première, celle que le philosophe privilégiera dans la suite de l'œuvre, fait appel à des procédures purement empirique de division de la quantité, et non pas directement à la logique des relations. C'est la seconde réponse, générale et logique, qui nous intéresse ici au premier chef ; mais avant d'exposer cette seconde voie, arrêtons-nous un instant sur la première.

Pour Russell, nous l'avons dit, une grandeur n'est jamais divisible. Il existe cependant, parfois, des procédures permettant de décomposer et d'agréger les quantités associées à tel ou tel type de grandeur. Russell appelle les grandeurs de ce genre « grandeur de divisibilité » (*magnitude of divisibility*)[37], en précisant que ce sont les quantités associées, et non les grandeurs elles-mêmes, qui sont divisibles. Dans les cas de ce genre, il est possible de doter une série de grandeurs d'une structure additive en se fondant sur les propriétés empiriques des procédures de division. Ainsi :

> Aussi longtemps que des quantités sont conçues de façon inhérente comme divisibles, une proposition telle que *A* est le double de *B* a une signification évidente — elle signifie que *A* a la grandeur de deux quantités, qui ont chacune la grandeur *B*, prises ensemble (Russell 1903, p. 178).

L'opération consistant à réunir deux poids sur une balance pour en former un nouveau illustre le propos. L'addition désigne, dans ce cas, la procédure concrète, empiriquement spécifiée, de réunir sur un même plateau différentes masses.

La théorie est classique et a été reprise par de nombreux auteurs, dont les positivistes logiques[38]. Le point crucial est qu'une telle démarche oblige à sortir du domaine des grandeurs pures pour considérer les quantités réelles (Russell dit parfois les totalités [*wholes*]), empiriquement données, possédant le genre de grandeur en question. L'addition n'est pas définie directement à partir des grandeurs elles-mêmes, mais indirectement, en utilisant les propriétés empiriques des quantités concrètes associées. C'est l'existence, donnée

36. Bien évidemment, la structure d'espace vectoriel étant développée à partir de la notion de groupe (il faut qu'une addition entre vecteurs soit définie pour que l'on ait un espace vectoriel), le lien entre le concept de grandeur mesurable et celui de multiplicité positionnelle (dont il a été question dans la section précédente) est immédiat.

37. Sur la théorie de la grandeur de divisibilité, voir Russell, 1903, p. 177-179, p. 252-256, 408-428. Les grandeurs de divisibilité sont, pour Russell, les grandeurs extensives.

38. Voir notamment Cohen et Nagel, 1934, p. 289-300.

empiriquement, de certaines possibilités opératoires qui permet la mesure[39]. Par exemple, la grandeur « plaisir » n'est pas une grandeur de divisibilité : aucune procédure évidente ne permet, selon Russell, l'agrégation ou la division des plaisirs. Par contre, la longueur d'un segment ou l'aire d'une surface sont des *magnitude of divisibility* : l'espace empirique étant ce qu'il est, il est possible de mettre bout à bout des segments ou de réunir des surfaces non intersécantes, pour définir un nouveau segment ou une nouvelle surface. Ce dernier exemple est particulièrement important : le caractère empirique de la géométrie métrique est, dans les *Principles*, fondé sur l'idée que la distance, au sens de *stretch*[40], est une grandeur de divisibilité.

La première façon d'introduire la structure additive permettant une mesure se fonde donc sur les propriétés de divisibilité des quantités associées aux grandeurs. Mais, puisqu'elle dépend de l'existence contingente de procédures de division et d'agrégation, cette première approche n'est pas généralisable. Or, pour Russell, il est possible et nécessaire de développer une théorie logiquement pure de la grandeur mesurable :

> Dans le cas [de la grandeur de divisibilité] nous avons encore affaire à une addition [...] dans le sens d'une combinaison de totalités formant une nouvelle totalité. Mais il y a d'autres cas de grandeur, où nous n'avons aucune addition de cette sorte. La somme de deux plaisirs n'est pas un nouveau plaisir, mais simplement deux plaisirs. La somme de deux distances [*distances*] n'est pas non plus à proprement parler une distance [*distance*]. Dans ce cas, cependant, nous pouvons étendre l'idée d'addition. Une telle extension doit toujours être

39. Russell, 1903, p. 178-179 : « Il y a un sens clair à dire qu'une grandeur de divisibilité est la double d'une autre, lorsqu'elle s'applique à une totalité (une quantité) qui contient deux fois plus de parties. Mais dans le cas des totalités infinies, la chose n'est plus aussi simple. [...] Nous avons ici besoin d'une méthode qui ne fasse pas référence aux parties simples. Dans l'espace réel, nous avons les jugements immédiats d'égalité de deux totalités infinies. [...] Sans ces comparaisons immédiates, qui sont nécessaires à la fois logiquement et psychologiquement, rien ne peut être accompli : nous sommes toujours réduit, en dernière instance, au jugement immédiat que notre règle de mesure n'a pas beaucoup changé de taille durant la mesure, et ce jugement est premier par rapport aux résultats de la science physique concernant le changement de taille réel des corps. »

40. Voir Russell, 1903, p. 177-179, p. 408-418, p. 419-428. Russell développe deux présentations de la géométrie métrique. Dans la première, la géométrie métrique est une science empirique, et la distance est une grandeur de divisibilité, le « *stretch* » (ainsi : « La géométrie métrique, en tant que sujet indépendant, requiert la nouvelle notion de la grandeur de divisibilité d'une série, qui est indéfinissable et qui n'appartient pas, à proprement parler, aux mathématiques pures. » [*ibid.*, p. 428]). Dans la seconde, la géométrie métrique appartient aux mathématiques, et la distance est définie comme une relation entre deux points, la « *distance* » (ainsi : « Il y a, il est vrai, une autre géométrie métrique, développée à partir des distances [*distances*], définies comme relations un-un ayant certaines propriétés, et ce sujet fait partie des mathématiques pures » [*ibid.*, p. 428]).

> possible là où une mesure peut être effectuée au sens le plus naturel et le plus restreint que nous sommes en train de discuter[41] (Russell, 1903, p. 180).

À quelle extension du concept d'addition Russell fait-t-il ici référence ? Quelle est la seconde manière de définir une mesure sur une grandeur ?

5. La théorie relationnelle de la distance

Russell s'en explique dans la suite :

> Il se trouve parfois que deux quantités, que l'on ne peut pas additionner au sens propre, ont une relation, qui a elle-même une relation une-une avec une quantité du même genre que celles qu'elle relie. Supposons que *a*, *b*, *c* sont des quantités de ce genre ; nous avons, dans le cas examiné, une certaine proposition *aBc*, dans laquelle *B* est une relation qui détermine univoquement et est déterminée univoquement par une certaine quantité *b* du même genre que *a* et *c*. [...] Si α, β, γ sont des termes dans une série où il y a une distance, les distances $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ ont une relation qui est mesurée par (mais non identique à) la distance $\beta\gamma$. Dans [un] cas de ce genre, par une extension de l'addition, nous pouvons poser $a + b = c$ à la place de *aBc*. Chaque fois que nous avons un ensemble de quantités ayant des relations de ce genre, si, en plus, *aBc* implique *bAc*, de sorte que $a+b = b+a$, nous serons en mesure de faire comme si nous avions l'addition usuelle, et nous serons en conséquence capable d'introduire la mesure numérique (*ibid.* p. 180).

La première phrase de l'extrait est essentielle : certains types de grandeur sont tels que deux grandeurs de ce type ont entre elles une relation que l'on peut associer à une grandeur du type en question. Russell adopte la notation suivante : si *a* et *c* ont entre elles la relation associée à *b*, on écrira que *aBc*. L'idée de Russell est d'interpréter la relation *B*, associée à *b*, comme l'addition à *a* de *b*, c'est-à-dire comme la relation « ...+ *b* =... », de façon à pouvoir écrire *aBc* comme « $a + b = c$ »[42].

Bien entendu, ce passage de la relation à l'addition n'a de pertinence que si la structure relationnelle définie sur les grandeurs dote le symbole additif des propriétés attendues (celles qui garantissent la possibilité de définir un groupe archimédien). C'est pourquoi, par exemple, Russell précise que *aBc* doit impliquer *bAc*. Mais à la différence de ce qui se passe pour les grandeurs de divisibilité, aucune référence aux quantités concrètes n'est ici nécessaire ; les propriétés de la loi interne de groupe sont dérivées des seules conditions posées sur la structure relationnelle associée aux grandeurs considérées, et aucune procédure empirique d'agrégation n'est utilisée.

---

41. Pour comprendre la phrase « la somme de deux distances n'est pas non plus à proprement parler une distance », il est important de conserver à l'esprit la différence entre *stretch* et *distance*. La somme de deux distances, entendue comme grandeur de divisibilité, c'est-à-dire comme *stretch*, est, évidemment, une grandeur de divisibilité.

42. Russell suit ici la démarche de Cayley, qui (dans Cayley, 1878) montre que tout groupe est isomorphe à un groupe de transformation. Sur ce point, voir *infra*.

Russell n'explique pas très clairement, dans les *Principles*[43], quelles sont les conditions que la structure relationnelle doit satisfaire pour permettre la définition d'une addition. Mais dans la version anglaise de *Sur la logique des relations* (Russell 1900b, p. 594-597, p. 609-611), il donne une présentation formelle, plus lisible et maîtrisée, de sa théorie. Au lieu de raisonner, comme en 1903, sur un ensemble de relations associées à des grandeurs, il définit une grandeur mesurable d'un certain type comme une série de relations un-un ayant un même champ. Les grandeurs particulières sont ainsi directement considérées comme des relations, et la grandeur comme une série de relations. Nous le verrons bientôt, ce changement, bien que spectaculaire, n'est pas essentiel. Russell nomme distance les grandeurs mesurables (la notion de distance n'est pas ici spatiale, mais absolument générale), et il pose :

> $\Delta = FG \cap L \ni \{x, y \in \lambda \,.\supset_{x,y} .\, {}_{\exists}L \cap R \ni (xRy) : Q = R_L \,.\, R_1, R_2, R_3 \in L \,.\, R_1QR_2$
> $\supset_{R1,\, R2,\, R3} .\, R_1R_2 = R_2R_1 \,.\, R_1R_3\, Q\, R_2R_3\}$[44].
>
> *Note*. Ceci est la définition d'un type de distance, c.-à-d. d'une classe de distances quantitativement comparable. Un type de distance est une série, dans laquelle il y a un terme entre deux termes quelconques, qui est également un groupe. N'importe quelle paire de termes appartenant au champ de ce groupe est reliée par une relation du groupe. Si Q est la relation en vertu de laquelle les relations du groupe forment une série, et si R_1 et R_2 sont des relations de ce groupe telles que R_1QR_2, alors $R_1R_2 = R_2R_1$, et la relation Q a encore lieu lorsque les deux côtés sont multipliés par n'importe quelle relation du groupe.

Le passage est difficile, et notre objectif est seulement de rendre compte des lignes de force de la construction russellienne, en laissant de côté les détails. Deux éléments entrent dans la composition du concept de distance, la sérialité et l'additivité : « Un type de distance est une série [...] et également un groupe. » La distance est une série, et, en tant que telle, elle est une grandeur.

---

43. 1903, p. 180 : « Par distance d'un certain genre, j'entends un ensemble quantitatif [c'est-à-dire ordonné] de relations asymétriques qui sont telles que toute paire de termes d'une classe donnée est liée par une et une seule relation, qui sont telles que, s'il existe une relation de ce type entre *a* et *b*, et également entre *b* et *c*, alors il en existe une entre *a* et *c*, la relation entre *a* et *c* étant le produit relatif de celle liant *a* et *b* et de celle liant *b* et *c* ; le produit en question est commutatif, c.-à-d. indépendant de l'ordre des facteurs ; et, finalement, si la distance *ab* est plus grande que la distance *ac*, alors, *d*, étant un autre membre de la classe, *db* est plus grand que *dc*. »

44. Afin de pouvoir lire la définition, écrite en « péanien », précisons la terminologie et quelques éléments de syntaxe. *F* désigne la classe des séries compactes, *G* la classe des groupes ; *(* est le champ des relations éléments de *L* ; « $\exists L \cap R \ni (xRy)$ » signifie qu'il y a une relation liant *x* et *y* qui appartient à l'ensemble *L* ; *RL* est la relation qui ordonne *L*. On a donc : une distance *L* d'un certain type est un ensemble de relations, qui forment un groupe et une série compacte, tel que (« $\ni$ ») tout couple appartenant au champ unique des relations est relié par une relation de *L*, et tel que le groupe est abélien et compatible avec la structure d'ordre. Δ est l'ensemble de toutes les distances *L* d'un certain genre.

Mais la distance est également un groupe, et c'est cette seconde structure qui lui confère le statut de grandeur mesurable. Comment Russell définit-il un groupe ?

C'est au début de l'article que le philosophe introduit la notion (1900b, p. 594-595). Un groupe G est une classe de relations bijectives définies sur un même ensemble λ, qui est telle que : si $R \in G$, alors $R^{-1} \in G$; si R_1 et R_2 $\in G$, alors R_1R_2[45] (G. Le groupe G lié à une distance L est de plus abélien, puisque $R_1R_2 = R_2R_1$; enfin, il est tel que chaque couple de l'ensemble λ (sur lesquelles les relations sont définies) est relié par une relation de G[46]. Les éléments d'un groupe (comme d'une distance), loin d'être quelconques, sont donc toujours, pour Russell, des relations un-un qui ont le même champ — ou encore, en termes plus courant en mathématiques, des transformations sur un ensemble. La loi interne du groupe, l'addition, est dans ce contexte conçue comme un produit relationnel — ou encore, comme une composition de transformations. Ces deux définitions inscrivent clairement Russell dans une tradition algébrique qui remonte à Cayley. Celui-ci est en effet le premier à avoir défini de façon abstraite la structure de groupe et à établir que tout groupe abstrait est isomorphe à un groupe de transformations[47]. Russell reprend l'idée, mais modifie la terminologie : les transformations sont des relations bijectives, ayant pour champ le même ensemble, et la composition se conçoit comme un produit relationnel. Ce changement terminologique est crucial, car il lui permet de présenter la théorie algébrique des groupes comme un développement de la logique des relations[48]. Une fois la manœuvre réalisée, une théorie purement relationnelle des grandeurs mesurables, c'est-à-dire de la distance, est à portée de main.

45. Russell définit la relation « produit relationnel PR » ainsi : $\forall x \forall y (xPRy \leftrightarrow \exists z [xPz \wedge zRy])$. Donc, si P est la relation frère et R la relation père, PR est la relation « oncle paternel ». Sur l'opération et le produit relationnel, nous renvoyons à Sackur, 2005, p. 174-194, et Russell-Whitehead, 1910-13, p. 256-264.

46. Cette propriété n'est pas satisfaite pour tous les groupes. En termes plus contemporains, on dira que l'action de G sur λ est, dans le cas des distances, transitive. Notons aussi que Russell n'exclut pas la possibilité qu'il y ait plusieurs relations associées à un couple quelconque de λ ; sur ce point, voir *infra*.

47. Cayley, 1878. Le mathématicien ne considère dans son article que les groupes finis. C'est cette double approche, en termes d'opération ou de transformation, qui permet de passer de la présentation des *Principles* (1903, p. 180 ; cité *supra*.) à celle adoptée ici (1900b, p. 609-611) ; en 1903, Russell raisonne à partir de la structure additive ; en 1900, il part du groupe de transformations, conçu comme structure relationnelle. Comme nous l'annoncions plus haut, la différence entre les deux textes n'est donc pas décisive.

48. J. Sackur souligne fort justement (dans 2005, p. 174-194), l'importance de ce lien entre produit relationnel et opération algébrique. Mais contrairement à ce qu'il avance, il ne nous semble pas que Russell soit « embarrassé devant le concept d'opération ». La reformulation de l'addition en terme relationnel constitue, au contraire, selon nous, une grande réussite : Russell réussit à redéfinir dans le cadre de la nouvelle logique les concepts fondamentaux de la tradition algébrique issue des travaux de Cayley.

Russell montre d'abord que si $S = RR = R^2$, la mesure de S relativement à R est de 2 — et le résultat vaut pour tout exposant entier. Il généralise ensuite la procédure, d'abord aux mesures rationnelles : de même que la mesure d'une grandeur A relativement à une grandeur B est dite être de m/n (avec m et n entiers) si et seulement si m grandeurs B ajoutées les unes aux autres sont égales à n A mis bout à bout ($mB = nA$), de même (1900b, p. 610) la mesure de S relativement à R est de m/n ($xR^{m/n}y = xSy$) si et seulement si $R^m = S^n$; puis, aux mesures négatives (en utilisant les relations réciproques)[49], et, plus difficilement, en reprenant les constructions de Burali-Forti, 1898, et en énonçant deux axiomes supplémentaires, le postulat d'Archimède et le postulat de linéarité de Du-Bois Reymond[50], aux mesures réelles[51]. Au final, la mesure (le nombre ou la quantité), s'introduit dans le nouveau dispositif comme exposant (pour le produit relationnel) d'une relation considérée comme unité. Bien entendu, pour démontrer qu'à chaque grandeur d'une distance d'un certain genre L, il est possible d'associer un et un seul nombre réel (une relation unité étant choisie), il faut utiliser, en plus de la structure de groupe, la structure ordinale. Russell montre ainsi que L formant un ordre total, archimédien, il est possible de concevoir chaque relation comme un multiple (au sens défini plus haut) réel d'une relation unité. D'où l'importance de la relation d'ordre Q, de la condition de compatibilité et des postulats d'Archimède et de linéarité. Mais le point réellement novateur et original, la véritable clé de voûte de la construction, n'est pas celui-là ; il est d'avoir réussi à concevoir la structure algébrique de groupe comme une excroissance de la logique des relations.

On pourrait d'ailleurs se demander si le prix payé par Russell pour insérer la mesure à l'intérieur du nouveau cadre logique n'est pas trop lourd. Peut-on réellement considérer les grandeurs mesurables comme des relations ? Les distances, les masses sont-elles des relations ? Il semble y avoir un gouffre entre la représentation ordinaire d'une quantité et celle véhiculée par le symbolisme russellien. Comment réduire l'écart ? Dans *On the Logic of Relations*, Russell, en utilisant le fait qu'à tout couple de points x et y du champ unique λ des relations correspond au moins une relation-distance, définit une nouvelle entité, le « segment » (xy) : (xy) est l'ensemble des points qui ont une relation plus grande que l'identité avec x et moins grande que l'identité avec y (1900b, p. 609), ou encore : (xy) est l'ensemble des points entre x et y[52]. Russell peut

49. Russell, 1900b, p. 610.

50. Russell adapte ces deux axiomes à son contexte « relationnel » dans 1900b, p. 610-611 ; voir également Russell, 1903, p. 254.

51. Russell reprend la procédure mise au point par Burali-Forti (1898), procédure qui provient elle-même de la méthode des coupures. Comme il ne touche pas directement notre propos, nous laisserons ce point important de côté.

52. Russell dérive un ordre sur les segments de l'ordre sur les relations de L — si l'on admet l'axiome d'Archimède (mais il faut l'admettre, le fait que l'ordre soit total ne suffit pas), il suit de la transitivité de l'action de G, que si $(xy) = (wz)$, alors la relation associée à x et y est la même que la relation associée à w et z : à tout couple d'éléments quelconques de λ correspond une et une seule relation de L ; ou encore : l'action de G est simple sur λ. Rappelons que la série des relations sur L étant compacte (xy) n'est pas vide si x diffère de y.

alors transporter les résultats obtenus sur les relations vers les segments. Ainsi trouve-t-on :

$$n \in \mathrm{N} \;.\; xRy \;.\; zR^{n}w \;.\supset.\; (zw) = n(xy)$$
$$m \in \mathrm{N} \;.\; n \in \mathrm{N}^{*} \;.\supset :.\; xR^{m/n}z \;.\; xRy \;.\supset (xz) = m/n(xy)$$
$$\alpha \in \mathrm{R} \;.\; xR^{\alpha}z \;.\; xRy \;.\supset (xz) = \alpha(xy).$$ [53]

Les entités mesurées ne sont plus ici des relations, mais des « intervalles » dans une série — et la structure relationnelle paraît simplement associée aux grandeurs (comme dans l'extrait des *Principles* cité plus haut). La manœuvre est importante, car elle permet d'exprimer l'ensemble des résultats sous une forme très familière, celle du symbolisme vectoriel utilisé par Russell lorsqu'il étudiait l'*Universal Algebra.* Une quantité scalaire « α » multiplie une grandeur géométrique « qualitative » (xy). Mais alors qu'en 1899 Russell présente cette notation vectorielle comme une donnée première, qui représente directement la structure conceptuelle sous-jacente, elle est, en 1900, dérivée d'un symbolisme plus fondamental, tout entier articulé autour de la relation et du produit relationnel. Dans la version anglaise de *Sur la logique des relations*, le philosophe parvient à montrer comment ce qui était le point de départ des très belles analyses de Whitehead peut être conçu comme le point d'aboutissement d'une doctrine plus fondamentale, la théorie des relations. Le résultat est enfin conforme à l'analyse philosophique que Russell avait, dès 1897, avancée : le cadre relationnel est désormais suffisamment général pour permettre la reconstruction en son sein de la structure d'espace vectoriel.

6. Conclusion

Peu d'études sur Russell évoquent, ne serait-ce que brièvement, ce dont nous venons de parler[54]. Et on pourrait, en effet, se demander à quoi bon exhumer ce qui ne semble constituer qu'un détail à l'intérieur du vaste mouvement dans lequel est prise la pensée russellienne à l'époque — le philosophe n'a-t-il pas lui-même fait disparaître les deux sections consacrées au groupe et à la distance dans la version publiée de *Sur la logique des relations* ? Certes. Mais Russell a consacré une partie entière des *Principles* à la grandeur, et la dernière section des *Principia*[55] développe une doctrine encore très proche de

53. Russell, 1900b, p. 610-611.

54. Voir cependant Grattan-Guinness, 2000, et Rodriguez-Consuegra, 1991. Grattan-Guinness (2000, p. 296-298) souligne l'importance des sections sur le groupe et la distance dans [Russell 1900b], qui disparaîtront par la suite. Mais il ne voit ni le lien avec les développements idéalistes sur la quantité ni le rapport avec les textes des *Principles* et des *Principia.* Il ne mentionne pas, ainsi, la très grande ressemblance entre la partie VI des *Principia* sur la quantité (qu'il commente pourtant [2000, p. 408-410]) et la structure mise en place en 1900 ; voir note suivante.

55. Voir Russell-Whitehead, III, p. 339-456. La théorie relationnelle des familles vectorielles est le développement de l'ébauche que présente Russell (1900b) ; voir ainsi Russell, 1913, p. 233 : « Nous considérons chaque genre de quantité comme ce que nous pouvons appeler une

celle exposée en 1900. Surtout, si on les replace dans un contexte plus large, la présence discrète de ces structures algébriques dans la théorie des relations acquiert un sens nouveau.

Reprenons le fil général de l'histoire que nous venons de raconter. En 1897, Russell s'approprie une conception idéaliste, post-hégélienne, de la grandeur, selon laquelle la « vérité » de la quantité et de la qualité est la mesure. La double position d'une variation et d'une identité que requiert le concept de *magnitude* ne s'effectue qu'à partir d'un terme plus général : la catégorie relationnelle de la comparaison. Russell combine, en 1898-1899 cette ligne de pensée, issue d'une tradition métaphysique séculaire, à l'analyse des algèbres grassmaniennes, découvertes à l'occasion de la lecture de *A Treatrise on Universal Algebra*, écrit par son ancien professeur A. N. Whitehead. Le calcul positionnel se présente comme un dépassement inabouti de l'opposition entre qualité et quantité. D'un côté, en effet, le symbolisme vectoriel juxtapose et fige ce qu'il faudrait articuler : une « quantité » scalaire et une « qualité » vectorielle ; de l'autre, le formalisme grassmanien rend compte de façon très élégante de l'articulation dialectique entre quantité et qualité : il se présente, selon Russell, comme un calcul général sur les séries, et les séries de séries.

La question que ces développements appellent et ne règlent pas est celle de l'adéquation entre le discours philosophique et le formalisme mathématique. Russell affirme d'une part que la grandeur est en son fond une catégorie relationnelle ; il prétend d'autre part que la grandeur est une série, c'est-à-dire la combinaison d'un « extraordinaire » et d'un nombre variable. Comment concilier les deux thèses ? L'élaboration d'une théorie des relations ne fait qu'aviver la tension, car une telle construction fournit le cadre, conceptuel et notationnel, permettant de penser les séries de façon relationnelle. Théorie relationnelle de la grandeur et développement algébrique sur les vecteurs ne s'opposent plus seulement comme une approche philosophique et mathématique du même concept — l'opposition envahit désormais le terrain mathématique, rendant plus pressante encore l'élaboration d'une doctrine unitaire de la grandeur mesurable.

« famille vectorielle », c.-à-d. une classe de relations un-un qui ont toutes le même domaine converse, et telles que le domaine de toutes est contenu dans le domaine converse. Dans les cas comme celui de la distance spatiale, la façon d'appliquer cette conception est évidente ; dans le cas des masses, la conception devient applicable en considérant p. ex. un gramme comme *+1* gramme, c.-à-d. comme la relation d'une masse *m* à une masse *m'* quand *m* excède *m'* d'un gramme. Ce qui est communément appelé un gramme sera la masse qui aura la relation *+1* gramme au zéro du genre masse. » Russell et Whitehead évoquent même la conception, développée dans *On the Relations of Numbers and Quantity*, selon laquelle les quantités sont des relations, pour justifier leur symbolisme ; voir (*ibid.*, p. 261) : « En faveur de cette méthode pour symboliser les idées de quantité (par des relations), on peut faire valoir (α) que c'est toujours une procédure possible, quelle que soit la valeur qu'on lui accorde eu égard à sa capacité à représenter les principes premiers, et (() qu'elle représente directement le principe « aucune *quantité* de quelque genre que ce soit sans une comparaison de différentes quantités de ce genre. »

Les grandes lignes de la solution proposée par Russell, exposée dans la section précédente, sont les suivantes : les grandeurs mesurables sont des relations de relations — plus exactement des séries compactes de relations bijectives, qui ont toutes le même domaine et qui forment un groupe abélien pour l'opération du produit relationnel[56]. Russell montre que cette définition permet de dériver le « calcul positionnel » de Whitehead : les vecteurs αe_i (avec α variable numérique) sont identifiés à des relations, et les additions vectorielles à des produits relationnels. Grâce à la nouvelle logique, le hiatus entre l'analyse conceptuelle et la théorie mathématique de la grandeur est enfin comblé.

S'il nous paraît opportun de revenir, aujourd'hui, sur l'histoire de cette réussite philosophique, c'est essentiellement pour deux raisons. La première est méthodologique. L'évolution décrite ici illustre de façon exemplaire, croyons-nous, le genre de démarche propre au Russell des *Principles*. Il ne s'agit jamais pour le philosophe de se situer sur le seul terrain métaphysique : une analyse conceptuelle pertinente de la notion de grandeur doit pouvoir supporter une confrontation avec la pratique des mathématiciens. Mais Russell, et c'est sur ce point qu'il est vraiment singulier, ne se satisfait pas pour autant de la pratique mathématique existante. Les puissantes constructions algébriques de Whitehead ne sont pas, selon lui, rationnellement transparentes : elles nécessitent une élucidation conceptuelle, externe, qui oblige à réorganiser jusqu'à leur fondement. Le logicisme, dans sa version russellienne, n'est donc pas une philosophie immanente aux mathématiques du genre de celle développée à la même époque par Poincaré, par exemple. La fécondité ou la profondeur mathématique n'est pas, pour Russell, l'ultime critère d'évaluation des théories. Le logiciste russellien confronte toujours différents registres de discours, et aucune de ses couches discursives n'est immunisée contre la révision. La lecture des manuscrits de cette époque est de ce point de vue très enrichissante. Russell y passe constamment, sans transition apparente, d'une analyse philosophique à un développement mathématique, et vice-versa. Pour lui, tout se passe comme si un bon argument philosophique devait pouvoir s'incarner en une théorie mathématiquement viable, et comme si, inversement, une doctrine métaphysique devait pouvoir se lire à même la formalisation mathématique. Cette absence de démarcation entre registres de discours, si elle fait peser sur le logicisme le risque du mélange des genres, manifeste aussi un très grand optimisme — une belle exigence et une très généreuse affirmation de l'unité de la raison.

La seconde raison pour revenir sur la genèse de la théorie des relations, et sur le lien existant chez Russell entre grandeur et relation, est l'intérêt intrinsèque de la doctrine. Affirmer que la grandeur est une relation de relations

56. Il faudrait ajouter, en plus des deux postulats requis pour étendre la théorie aux mesures irrationnelles, qu'à tout couple du champ correspond une relation, et que la structure d'ordre est compatible avec la structure de groupe.

est à la fois surprenant (en quoi une grandeur est-elle nécessairement une relation ?), difficilement intelligible (dans quel but soutenir une telle thèse ?), et intellectuellement très fécond : replacée dans le cadre des interrogations métaphysiques classiques liées à la quantité, la réponse de Russell est extrêmement originale, et le degré de sophistication à laquelle il la porte, inégalé. Encore aujourd'hui, la théorie exposée nous paraît posséder une certain attrait. Dans le sillage d'Armstrong[57], plusieurs philosophes contemporains se sont penchés sur les problèmes ontologiques posés par la quantité. La réponse russellienne, selon laquelle la quantité est une relation de relations, a su retenir l'attention[58]. Elle a été cependant, la plupart du temps, réduite à un dispositif « technique », certes intéressant, mais philosophiquement superficiel. Notre objectif a été ici de montrer qu'il n'en était rien — que le développement de ce que Russell nomme la « théorie de la distance» est le versant formel d'une analyse conceptuelle de la grandeur[59].

Bibliographie

Armstrong, D. *Universals and Scientific Realism*, Cambridge, CUP, 1978.

——. « Are Quantities Relations ? », *Philosophical Studies*, 54, 1988.

Bosanquet, B. *Logic or the Morphology of Knowledge*, Oxford, Clarendon Press, 1888.

Bigelow, J. *The Reality of Numbers : A Physicalist's Philosophy of Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1988.

Burali-Forti, C. Les propriétés formales des opérations algébriques, *Rivista di Matematica*, 6, p. 141-177, 1898.

Cayley, A. On the Theory of Groups, *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 9, 1878, p. 126-133.

Cohen, M. et Nagel, E. *Introduction to Logic and Scientific Method*, Londres, Routledge & Kegan Paul, 1934.

Couturat, L. 1896. *De l'Infini mathématique*, Paris, Blanchard, nouveau tirage, 1973.

——. Études critiques. L'algèbre universelle de M. Whitehead, *Revue de métaphysique et de morale*, 8, 1900, p. 323-362

Frege, G. *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 2, Jena, Pohle, 1903. Réédition Hildesheim, Olms, 1966.

Fuchs, L. *Partially Ordered Algebraic Systems*, Oxford, Pergamon Press, 1963.

Gandon, S. « Russell et l'*Universal Algebra* de Whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903) », *Revue d'histoire des mathématiques*, 10, 2004, p. 187-256.

57. Armstrong, 1978, 1988 ; Bigelow, 1988 ; Mundy, 1987 ; Michell, 1999.

58. Voir notamment Bigelow, 1988, et Michell, 1999. C'est grâce à Quine que la théorie russellienne n'est pas tombée dans un oubli définitif.

59. Certaines parties de cet article ont été la base d'une conférence donnée à Paris, en juin 2005, dans le cadre du séminaire « Histoires de géométries » de l'équipe F_2DS, et d'une autre donnée à Clermont, en octobre 2006, dans le cadre du séminaire du PHIER. J'ai bénéficié des questions et des remarques que les auditeurs m'ont, en ces deux occasions, adressées. Je remercie également les lecteurs anonymes pour leurs suggestions.

Grassmann, H. *Die Lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Kristallonomie erläutert*, Leipzig, Verlag von Otto Wigand, 1844 ; trad. fr. de D. Flament, Paris, Blanchard, 1994.

——. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strender Form bearbeitet*, Berlin, 1862 ; trad. anglaise de L. C. Kannenberg, Providence, American Mathematical Society, 2000.

Grattan-Guinness, I. *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940*, Princeton, PUP, 2000.

Griffin, N. *Russell's Idealist Apprenticeship*, Oxford, Clarendon Press, 1990.

Hegel, G. W. F. 1830. *Encyclopédie des sciences philosophiques. La science de la logique*, trad. fr. de B. Bourgeois, Paris, Vrin, 1986.

Hölder, O. Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikaliche Classe*, 53, 1901, p. 1-64.

Huntington, E. V. « A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitudes », *Transactions of the American Mathematical Society*, 3, 1902, p. 264-279.

Hylton, P. *Russell, Idealism and the Emergence of Analytical Philosophy*, Oxford, Clarendon Press, 1990.

Lelong-Ferrand, J., Arnaudies, J. M. *Cours de mathématiques — tome 2 : Analyse*, Paris, Dunod, 1972.

Michell, J. *Measurement in Psychology. A Critical History of a Methodological Concept*, Cambridge, CUP, 1999.

Moore, G. E. « The Nature of Judgement », *Mind*, 8, 1899, pp. 167-193.

Moore, G. H. « The Axiomatization of Linear Algebra : 1875-1940 », *Historia Mathematica*, 22, 1995, p. 262-303.

Mundy, B. The Metaphysics of Quantity, *Philosophical Studies*, 51, 1987, pp. 29-54.

Peano, G. *Calcolo Geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Turin, Fratelli Bocca, 1888 ; trad. anglaise de L. Kannenberg, Basel, Birkhauser, 2002.

——. Saggio di calcolo geometrico, *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, v. 31, 1896, p. 952-975.

Poincaré, H. *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1902 ; rééd. Paris, Flammarion, 1968.

Quine, W. V. O. 1941. Whitehead and the Rise of Modern Logic, in *Selected Logic Papers*, Cambridge, Harvard University Press, 1995, p. 3-36.

Rodriguez-Consuegra, F. *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell : Origins and Development*, Basel, Boston and Berlin, Birkhäuser, 1991.

Russell, B. *The Collected Papers of Bertrand Russell*, London and New-York, Routledge, 1983- ?

——. 1896-1898. Various Notes on Mathematical Philosophy, *Papers 2,* p. 6-29.

——. 1897a. *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge, CUP, 1897, cité dans la réédition London and New-York, Routledge, 1996 ; trad. fr. de A. Cadenat, Paris, Gauthier-Villars, 1901.

——. 1897b. « Review of Couturat, *De l'Infini mathématique* », *Mind*, n. s. 6, p. 112-119, in *Papers 2,* p. 60-67.

——. 1897c. « On the Relations of Numbers and Quantity », *Mind*, n. s. 6, p. 326-341, in *Papers 2,* p. 70-82.

——. 1898a. On Quantity and Allied Conceptions, *Papers 2,* p. 114-135.
——. 1898b. An Analysis of Mathematical Reasoning Being an Inquiry into the Subject-Matter, the Fundamental Conceptions, and the Necessary Postulates of Mathematics, *Papers 2,* p. 155-242.
——. 1898c. On the Constituents of Space and Their Mutual Relations, *Papers 2,* p. 309-321.
——. 1898d. Note on Order, *Papers 2,* p. 339-358.
——. 1899a. The Classification of Relations, *Papers 2,* p. 138-146.
——. 1899b. Notes on Geometry, *Papers 2,* p. 359-389.
——. 1899c. Miscellanous Notes : « Fragments on Series », *Papers 2,* p. 457-459.
——. 1900a. *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz with an Appendix of Leading Passages*, Cambridge, CUP.
——. 1900b. On the Logic of Relations with Applications to Arithmetic and the Theory of Series, *Papers 3,* p. 590-612.
——. 1901a. Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries, *Rivista di Matematica*, 7, p. 115-136, p. 137-148.
——. 1901b. Recent Italian Works on the Foundations of Mathematics, *International Monthly*, 4, 1901, p. 83-101, cité dans l'édition de *Papers 3,* p. 352-362.
——. 1903. *The Principles of Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1903.
——. 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, Allen and Unwin, trad. fr. de F. Rivenc, 1991.
——. 1959. *My Philosophical Development*, London, Allen and Unwin, trad. fr. de G. Auclair, 1961.
Russell, B. et L. Couturat, 1897-1913. *Bertrand Russell-Louis Couturat (1897-1913)*; Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique, A.-F. Schmid, dir., Paris, Kimé, 2001.
Russell, B. et A. N. Whitehead, 1910-1913. *Principia Mathematica*, t. 1-3, Cambridge, CUP, cité dans la 2e éd., 1925-1927.
Sackur, J. *Formes et faits. Analyse et théorie de la connaissance dans l'atomisme logique*, Paris, Vrin, 2005.
Solere, J.-L. « Plus ou moins : le vocabulaire de la latitude des formes », *in* J. Hamesse et C. Steel, dir., *L'élaboration du vocabulaire philosophique au Moyen Âge*, Turnhout, Brepols, 2000, p. 437-488.
——. The Question of Intensive Magnitudes According to Some Jesuits in the Sixteenth and Seventeenth Centuries, *The Monist*, vol. 84, 4, 2001.
Whitehead, A. N. 1898. *A Treatise on Universal Algebra with Applications*, Cambridge, Cambridge University Press, 1898 ; rééd. New York, Hafner, 1960.
——. *The Axioms of Projective Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, 1906 ; rééd. New York, Hafner, 1971.
——. *The Axioms of Descriptive Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, 1907 ; rééd. New York, Hafner, 1971.
——. *Principia Mathematica,* volume 3, Cambridge, Cambridge University Press, 1913.