Éducation et francophonie

La résolution de problèmes à l’école primaire : s’agit-il de « trouver la bonne formule »?

Problem solving in elementary school – is it about “finding the right formula”?

La resolución de problemas en la escuela primaria: ¿se trata de «encontrar la buena fórmula»?

Lalina Coulange et Carine Reydy

Volume 42, numéro 2, automne 2014

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d’apprentissage

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1027907ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1027907ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Association canadienne d’éducation de langue française

ISSN

1916-8659 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Coulange, L. & Reydy, C. (2014). La résolution de problèmes à l’école primaire : s’agit-il de « trouver la bonne formule »? *Éducation et francophonie*, *42*(2), 84–99. https://doi.org/10.7202/1027907ar

Résumé de l'article

Dans cet article, nous décrivons et étudions un dispositif collaboratif entre chercheurs, professeurs et élèves de fin d’école primaire (10-11 ans) centré sur la résolution de problèmes mathématiques. À travers l’analyse de trois exemples de problèmes expérimentés dans ce contexte, nous nous interrogeons sur les procédures que les élèves sont à même de développer pour résoudre les problèmes proposés et sur les potentialités de ces problèmes à contribuer à l’enseignement de savoirs algébrico-numériques chez les élèves. Ces analyses nous conduisent à interroger le rôle des formules et de leur production dans la démarche de modélisation algébrique *a priori* visée. Les résultats de notre étude nous amènent alors à considérer deux entrées possibles qui favoriseraient l’enseignement de savoirs préalgébriques à l’école primaire. Enfin, la recherche menée nous incite à penser que les représentations initiales des élèves et des enseignants sur ce qu’est une démarche de recherche en mathématiques ont une influence conséquente sur la mise en oeuvre des situations expérimentées.

La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?

Lalina COULANGE
ESPE d'Aquitaine, France

Carine REYDY
ESPE d'Aquitaine, France

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous décrivons et étudions un dispositif collaboratif entre chercheurs, professeurs et élèves de fin d'école primaire (10-11 ans) centré sur la résolution de problèmes mathématiques. À travers l'analyse de trois exemples de problèmes expérimentés dans ce contexte, nous nous interrogeons sur les procédures que les élèves sont à même de développer pour résoudre les problèmes proposés et sur les potentialités de ces problèmes à contribuer à l'enseignement de savoirs algébrico-numériques chez les élèves. Ces analyses nous conduisent à interroger le rôle des formules et de leur production dans la démarche de modélisation algébrique *a priori* visée. Les résultats de notre étude nous amènent alors à considérer deux entrées possibles qui favoriseraient l'enseignement de savoirs préalgébriques à l'école primaire. Enfin, la recherche menée nous incite à penser que les représentations initiales des élèves et des enseignants sur ce qu'est une démarche de recherche en mathématiques ont une influence conséquente sur la mise en œuvre des situations expérimentées.

ABSTRACT

Problem solving in elementary school – is it about "finding the right formula"?

Lalina COULANGE
E.S.P.E. of Aquitaine, France

Carine REYDY
E.S.P.E. of Aquitaine, France

In this article, we describe and study a collaborative arrangement between researchers, teachers and students at the end of elementary school (10-11 years old) focused on mathematical problem solving. Through the analysis of three examples of problems tested in this context, we ask about procedures the students develop to solve the problems, and the potential of these problems to contribute to students' acquisition of algebraic-numerical knowledge. These analyses lead us to question the role of formulas and of their production in the algebraic modelization process formerly targeted. The results of our study suggest considering two possible ways to promote the teaching of pre-algebraic knowledge in the elementary school. Finally, the research suggests that the initial perceptions of students and teachers on the nature of a mathematics research process have a significant influence on the implementation of study situations.

RESUMEN

La resolución de problemas en la escuela primaria: ¿se trata de «encontrar la buena fórmula»?

Lalina COULANGE
E.S.P.E. de Aquitania, Francia

Carine REYDY
E.S.P.E. de Aquitania, Francia

En este articulo, describimos y estudiamos un dispositivo colaborativo entre investigadores, maestro y alumnos del último año de primaria (10-11 anos) centrado en la resolución de problemas matemáticos. A través del análisis de tres ejemplos de problemas experimentados en dicho contexto, nos cuestionamos sobre los procedimientos que los alumnos son capaces de desarrollar para resolver los problemas propuestos y sobre las contribuciones potencialidades de esos problemas en la enseñanza de conocimientos algebraico-numéricos entre los alumnos. Esos análisis nos llevan a interrogar el rol de las fórmulas y de su producción en el procedimiento de modelización algebraica *a priori* determinada. Los resultados de nuestro estudio nos llevan a considerar dos entradas posibles que favorecerían la enseñanza de saberes pre-algebraicos en la escuela primaria. Finalmente, la investigación realizada nos incita a pensar que las representaciones iníciales de los alumnos y de los maestros sobre lo que es un procedimiento de investigación en matemáticas influenciaron consecuentemente la operacionalización de las situaciones experimentadas.

Introduction

Cela fait plusieurs années que notre équipe de formateurs et chercheurs en didactique des mathématiques s'intéresse à la résolution de problèmes à l'école (Bulf *et al.*, 2012; Coulange et Reydy, 2012; Reydy *et al.*, 2014) et se pose différentes questions à ce sujet. Que peut-on apprendre ou enseigner au sujet de la résolution de problèmes mathématiques? S'agit-il d'apprendre ou d'enseigner des savoirs, des savoir-faire liés à la résolution de problèmes? Si oui, lesquels? Les représentations des élèves et des enseignants sur la résolution de problèmes en mathématiques ont-elles un impact sur les apprentissages visés?

Nous nous intéressons plus spécifiquement dans cet article aux problèmes de généralisation et de modélisation de phénomènes numériques. Quelles sont les procédures envisageables pour résoudre ce type de problèmes? Dans quelles conditions la résolution de ce type de problèmes peut-elle contribuer à l'enseignement de savoirs ou de savoir-faire algébrico-numériques ou «préalgébriques»?

Notre réflexion se nourrit de résultats de recherche en didactique de l'algèbre (Chevallard et Bosch, 2012; Coulange, 1997; Gascon, 1995; Chevallard, 1989) pour caractériser des procédures et connaissances au regard d'une démarche de généralisation et de modélisation algébrique (Chevallard 1989; Gascon, 1995; Chevallard et Bosch, 2012). Ces auteurs s'intéressent d'une part, à la production de formule permettant de généraliser de tels phénomènes dans une perspective de modélisation algébrico-fonctionnelle. En se référant aux travaux historiques de Viète et de Descartes, ils accordent également de l'importance à un travail sur les paramètres, c'est-à-dire le(s) *nombre(s) supposé(s) connu(s)* qui permettent d'étudier les conditions d'existence de *l'inconnue (ou des nombre inconnus)* ou de validité d'un phénomène donné. Ces chercheurs en didactique affirment qu'il s'agit par là-même d'accéder à de véritables pratiques de modélisation algébriques, c'est-à-dire qui permettent de produire de nouvelles connaissances sur les phénomènes numériques.

Nous retenons notamment de ces travaux l'importance d'identifier, de généraliser et de modéliser les phénomènes numériques en jeu pour conduire à la production de formules algébriques permettant de généraliser ces phénomènes mais aussi à l'étude des conditions éventuelles de possibilité ou d'impossibilité de ces phénomènes.

Contexte de la recherche

Initialement, en 2007, il s'agissait de transposer à deux classes de fin d'école primaire (élèves de 10-11 ans) un dispositif collaboratif entre élèves, enseignants et chercheurs en mathématiques, « MATh.en.JEANS[1] », visant à faire vivre des activités de recherche en mathématiques au secondaire (élèves de 11 à 18 ans). Le projet a été repensé de manière à l'adapter aux différentes contraintes spécifiques du primaire. Intitulé « Math.en.3B[2] » depuis 2009, il concerne maintenant sept ou huit classes, soit environ 200 élèves qui collaborent avec cinq chercheurs en didactique des mathématiques. Le dispositif fait coopérer élèves, enseignants et chercheurs de la manière suivante : un chercheur formule devant une classe entière un énoncé de problème de recherche. Les élèves et le chercheur communiquent ensuite pendant plusieurs mois par courrier électronique. L'enseignant aménage pour les élèves des moments de recherche réguliers consacrés à la résolution du problème au cours desquels ils élaborent collectivement des réponses aux questions posées par le chercheur. L'année se termine par un congrès qui réunit les différentes classes concernées par le projet, leurs enseignants et les chercheurs, durant lequel les élèves présentent leurs résultats par un exposé en plénière et animent des stands. Ce sont les chercheurs qui choisissent les sujets de recherche. Notons que des nécessités dans le choix de ces sujets ont rapidement émergé : puisque les recherches se font sur le temps de travail de la classe ordinaire, ils doivent notamment convoquer des savoirs mathématiques officiellement enseignés ou à enseigner. Les problèmes initiaux et les questions envisagées par la suite doivent également être suffisamment consistants afin de donner lieu à un temps de recherche mathématique long, tout en permettant à une majorité d'élèves de s'engager dans ce travail. Précisons également que les questions de recherche autour de ce projet se sont posées de façon postérieure et donc contingente à sa mise en œuvre effective dans plusieurs classes.

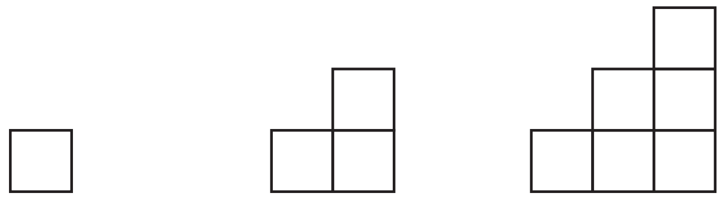
Il s'avère que plusieurs des sujets retenus par l'équipe de chercheurs correspondent à des problèmes de généralisation et de modélisation de phénomènes numériques. En effet, la plupart d'entre eux conduisent à l'émergence de processus généralisés de calcul susceptibles pour certains d'être formalisés au moyen de formules algébriques. Bien que l'algèbre ne soit pas un domaine d'étude enseigné au primaire, nous avons observé de manière récurrente que dans la résolution de ces problèmes les enseignants et leurs élèves cherchent visiblement à aboutir à l'élaboration d'une formule algébrique explicite. Il nous a semblé que le projet « Math.en.3B » donnait à voir la complexité inhérente aux processus intermédiaires à l'œuvre dans cette généralisation algébrique, de même que la gestion de cette complexité par les enseignants ou par les chercheurs engagés dans le projet.

Nous nous sommes intéressés plus précisément à trois problèmes présentés ci-dessous sous forme d'énoncés génériques :

1. http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm
2. Les « 3B » correspondent aux initiales des trois municipalités dans lesquelles se trouvent les classes concernées.

Problème des poignées de main
Il y a n personnes dans une assemblée. Pour se dire bonjour, chacun salue les autres par une poignée de main. À combien de personnes chacun serre-t-il la main? Combien de poignées de mains sont données en tout?

Problème des escaliers
Voici des escaliers à :



une marche — deux marches — trois marches

Combien de « briques » faudrait-il pour construire un escalier à n marches?

Problème de la calculatrice cassée
Une vieille calculatrice ne fonctionne plus très bien. Les seules choses que l’on peut encore lui faire faire sont +, -, n et m. Quand on l’allume, l’écran indique N. Comment faire en sorte qu’il indique $N + 1$?

En nous appuyant sur des outils méthodologiques classiques dans une perspective d’ingénierie didactique, nous effectuons des analyses *a priori* et *a posteriori* des situations relatives à la mise en scène didactique de ces problèmes et nous nous interrogeons sur les procédures de résolution des élèves et sur les connaissances sous-jacentes à ces procédures (Brousseau, 1998; Artigue, 2011).

Étude d’un premier problème : les poignées de main

Il s’agit d’un énoncé classique que l’on trouve souvent dans les ouvrages destinés à la formation d’enseignants du primaire en France. Il a d’ailleurs été utilisé bien avant nous par P. Eysseric dans le cadre d’ateliers de résolution de problèmes adressés à des élèves d’un âge similaire (Eysseric, 2003). Dans le cadre de « Math.en.3B », il est posé sous la forme suivante à une classe en 2011 :

Il y a 28 élèves dans votre classe. Pour se dire bonjour, chacun salue son camarade par une poignée de main. À combien d’élèves chacun serre-t-il la main? Combien de poignées de mains sont données en tout[3]*?*

Conformément à notre analyse *a priori*, les élèves répondent relativement aisément à la première question. Mais la recherche d’une réponse à la deuxième question donne lieu à des calculs erronés du type 27 × 28 ou 27 × 27 qui ne tiennent pas compte de la contrainte implicite : « On ne serre pas la main deux fois à un même camarade. » Le chercheur ou la chercheuse propose alors de simuler la situation évoquée soit avec un petit groupe d’élèves, soit en classe entière, afin de favoriser l’explicitation collective de cette contrainte et la dévolution de la situation didactique.

3. Il a pu être formulé de façon légèrement différente dans d’autres classes : Vingt professeurs de mathématiques se réunissent. Pour se dire bonjour, chacun salue les autres par une poignée de mains. À combien de personnes chacun serre-t-il la main? Combien de poignées de mains sont données en tout?

Cela permet aux élèves d'arriver assez aisément à des calculs de sommes du type 1 +…+ 27 = 378 ou 27 +…+ 1 = 378, selon la façon dont la simulation du problème a été jouée. Les calculs sont souvent effectués à la calculatrice, qui est autorisée lors de cette première phase de recherche. En demandant d'étudier un autre cas particulier avec un nombre plus élevé, on amène les élèves à chercher une méthode de calcul plus « générale ». Par exemple, la chercheuse qui expérimente ce sujet en 2011 pose la question suivante par courrier électronique aux élèves :

Vous êtes 146 élèves dans votre école. Si on imagine que pour se dire bonjour chacun salue son camarade par une poignée de main, combien de poignées de main sont données en tout?

C'est la recherche d'une économie dans les calculs à effectuer qui va favoriser l'émergence d'un procédé général de calcul. Voici un exemple de scénario observé dans une autre classe. Le premier calcul erroné a donné 27 × 28 = 756. Après rectification, les élèves calculent 1+…+27= 378 et remarquent que 378 est la moitié de 756, donc $1 + \ldots + 27 = \frac{28 \times 7}{2}$. Ils obtiennent alors la formule $n \times \frac{n - 1}{2}$ qui découle d'un seul fait numérique constaté. Notons également que le choix des nombres joue le rôle de variable didactique : la formule apparaît plus aisément dans le cas d'un effectif initial de 20 personnes, car la relation double/moitié est plus facile à identifier pour des nombres comme 190 et 380 que dans le cas présenté ci-dessus. La question de la justification de ce processus de calcul généralisé et de la formule correspondante peut alors être soulevée. Nous y reviendrons.

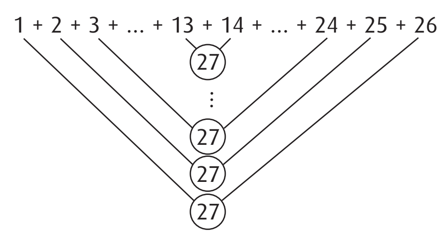
Mais bien d'autres scénarios sont envisageables, comme celui qui apparaît dans la classe où le problème est expérimenté en 2011. Les élèves écrivent le message suivant à la chercheuse :

> On a remarqué qu'on enlève 1 chaque fois.
>
> Pour 5 élèves : On part de 4, car le premier ne se serre pas la main, soit 4+3+2+1=10
>
> Pour 28 élèves : 27+26+25..+1=378
>
> Dans notre école, on est 146 élèves. Avec notre méthode, c'était beaucoup trop long.
>
> 145+144+143 .... Pfff
>
> On a cherché une méthode moins longue. On a réécrit les différents résultats :
>
> 5 élèves ----------------------------> 10
>
> 28 ---------------------------------------> 378
>
> 8 ---> 28
>
> On a cherché comment on passait du nombre d'élèves au nombre de poignées de main.
>
> 5x2 ------> 10 Vrai
>
> 28x2 ----------> 378 Faux
>
> On ne part pas du nombre donné dans l'énoncé, mais plutôt de ce nombre -1.
>
> On a vu qu'il fallait diviser le nombre par 2 et le multiplier par le nombre -1, puisqu'on enlève 1 chaque fois. On a trouvé : (N:2) x (N-1)
>
> 5 --> (5:2) x (5-1)
>
> 28 --> (28:2)x(28-1) Vrai
>
> 8 --> (8:2)x(8-1) Vrai

Donc, pour 146 élèves :
(146:2) x 145 = 10 585
Le résultat est-il exact?

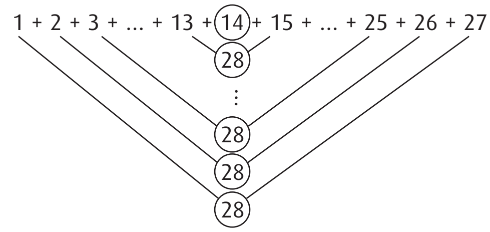
L'analyse de ce message montre que les élèves commencent par constater qu'il s'agit d'ôter 1 au nombre évoqué dans l'énoncé. Ils tentent ensuite d'utiliser les exemples traités au préalable, en cherchant des relations entre les données du problème et les résultats trouvés, ce qu'ils formulent d'ailleurs explicitement : « *On a cherché comment on passait du nombre d'élèves au nombre de poignées de main.* » Ils essaient d'abord de trouver une relation de proportionnalité entre ces différentes données, ce qui paraît cohérent avec les connaissances enseignées en fin de primaire. Mais, échouant et se rappelant qu'il faut ôter 1 au nombre de départ, ils tentent visiblement de trouver un coefficient multiplicateur entre les « nombres d'élèves moins 1 » et les résultats produits lors de leurs différents exemples. Ils aboutissent ainsi au « nombre d'élèves divisé par 2 ». Enfin, ils procèdent à des vérifications sur les exemples. Ce type de solutions engage certes des connaissances anciennes sur les nombres et les relations entre les nombres, mais il nous conduit à interroger le type de processus de généralisation et de modélisation à l'œuvre. En effet, tout se passe comme si, au lieu de s'appuyer sur l'identification d'un phénomène numérique généralisable, les élèves en présupposent l'existence et cherchent à le « découvrir ». C'est loin d'être anodin! Les connaissances mises en fonctionnement par ces élèves semblent presque contre-productives par rapport à celles attendues sur la généralisation et la modélisation.

Il est toutefois possible d'engager les élèves dans la recherche d'une justification de la généralisation numérico-algébrique sous-jacente. Par exemple, le chercheur peut guider les élèves pour faire émerger un constat à partir des sommes intermédiaires produites par les élèves par le biais d'une écriture du type suivant (écriture produite pour un nombre initial de 27 personnes) :



et qui conduit au résultat : $13 \times 27 = 27 \times \frac{26}{2}$. La formule à laquelle on peut aboutir est alors $n \times \frac{n - 1}{2}$ où n désigne le nombre initial de personnes.

Or nous avons pu constater que ce type de constat n'émerge que par le biais d'un étayage fort de la part du chercheur et de l'enseignant. Par ailleurs, dans les faits, deux cas seraient à distinguer : le cas d'un nombre initial pair ou impair. En effet, pour un nombre initial de 28 personnes, l'écriture de la somme à produire est :



et conduit pour sa part au résultat $(28 \times 13) + 14 = 28 \times \left(\frac{28}{2} - 1\right) + \frac{28}{2}$. La généralisation permettrait dès lors d'aboutir à l'écriture de la formule suivante : $\left(\frac{n}{2} - 1\right) \times n + \frac{n}{2}$ où n désigne le nombre initial de personnes.

Les deux formules obtenues sont bien sûr équivalentes, mais les élèves du niveau considéré ne disposent pas *a priori* des moyens mathématiques requis pour prouver cette équivalence. Remarquons d'ailleurs que, chaque fois que ce type de généralisation surgit dans les classes, seul le cas pair est étudié et généralisé à tous les cas, rendant muette la distinction à opérer entre les cas pair et impair.

En résumé, nos analyses *a priori* et *a posteriori* tendent à montrer que, si l'identification du phénomène numérique semble facilitée par certaines caractéristiques de l'énoncé (par exemple, le fait de pouvoir mimer la situation), la généralisation de ce phénomène est délicate. La production d'une formule paraît soit difficilement accessible à ce niveau, soit à même de se faire par le biais de connaissances n'ayant pas un avenir satisfaisant du point de vue de la démarche de modélisation algébrique. Dès lors, l'institutionnalisation de savoirs liés à des pratiques de modélisation algébrico-numérique paraît poser problème.

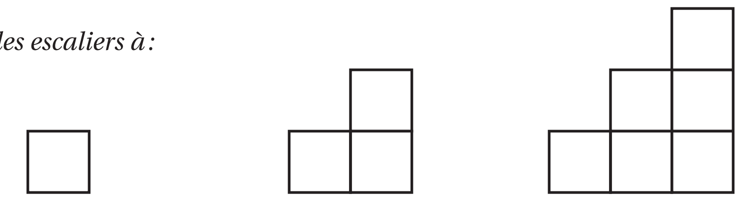
Nous nous proposons maintenant d'étudier un deuxième problème expérimenté dans le cadre du projet « Math.en.3B » qui peut paraître analogue au problème des « poignées de main » au sens de Costermans (2001), puisque la « structure profonde » de ces deux énoncés est quasi similaire : il s'agit dans les deux cas de calculer la somme des n (ou n-1) premiers entiers. Pour autant, la situation didactique envisageable n'est pas la même[4]. L'habillage retenu dans ce deuxième exemple agit probablement de manière non négligeable sur les procédures des élèves. Précisons également que nous n'avions pas pour objectif *a priori* de favoriser une résolution par analogie, comme cela peut être le cas des auteurs qui jouent sur le caractère isomorphe de problèmes mathématiques. En revanche, nous étions curieux de voir si les élèves seraient capables de reconnaître le caractère identique de la structure mathématique sous-jacente aux deux problèmes lors du congrès final.

4. Cet exemple lié à deux problèmes isomorphes est d'ailleurs à même de donner sens à la distinction faite par Brousseau (1998) entre situation et problème.

Étude d'un deuxième problème : les escaliers

Ce deuxième problème s'inspire d'une activité publiée dans un numéro spécial de la revue *Grand N* (adressée à un public d'enseignants du primaire, de formateurs et de chercheurs). L'énoncé donné aux élèves est le suivant.

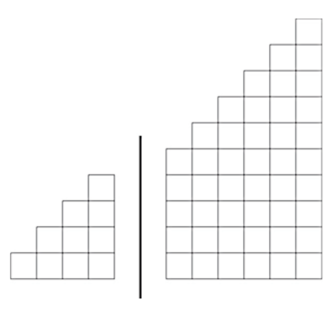
Voici des escaliers à :



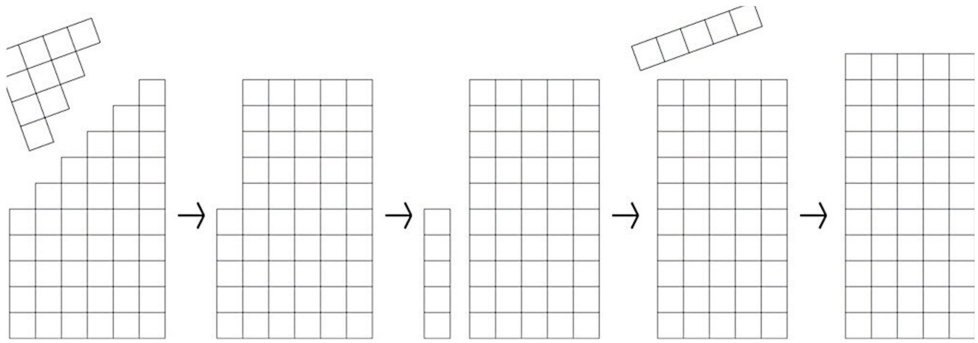
Combien de « briques » faudrait-il pour construire un escalier à 4 marches? Combien pour un escalier à 6 marches? Et pour un escalier à 10 marches?

Les élèves répondent assez rapidement aux premières questions de l'énoncé soit en faisant des dessins, soit en constatant qu'il s'agit d'additionner les entiers compris entre 1 et le nombre total de marches indiqué. La question de la généralisation numérique peut dès lors être posée par le chercheur en proposant de chercher le nombre de briques nécessaires pour construire un escalier de 100, 200 ou 300 marches, par exemple. Cela disqualifie les méthodes basées sur le dessin ou sur des calculs effectués à la main, mais est susceptible de faire émerger des procédures erronées qui tentent de se ramener à un problème de proportionnalité du type « *pour un escalier de 200 marches, je multiplie par 20 le résultat trouvé pour un escalier de 10 marches* ». Pour invalider ce type de proposition, le chercheur peut inviter les élèves à fabriquer collectivement l'escalier en question sur du papier quadrillé. Il peut aussi faire constater que le modèle proportionnel ne fonctionne pas pour des valeurs plus petites (passage d'un escalier à 3 marches à un escalier à 6 marches, par exemple).

Des tentatives de généralisation similaires à celles observées pour le problème des « poignées de main » apparaissent. Mais cet habillage favorise également l'émergence de nouvelles stratégies de type géométrique proposées par des élèves. Nous en détaillons une ci-après, rencontrée dans une classe de CM2 et qualifiée par les élèves de « téléportation de morceaux d'escaliers » après son exposé à la classe par l'élève qui l'avait produite. Celle-ci, Manon, suggère tout d'abord de découper l'escalier de 10 marches de la manière suivante :



Puis elle « téléporte » le morceau de gauche sur le dessin, de manière à recomposer une figure rectangulaire de 11 briques sur 5 briques. Voici une schématisation de sa méthode :

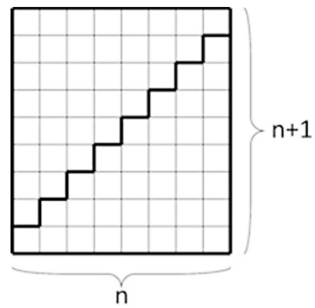


Ainsi, Manon constate que le nombre de briques nécessaires pour construire un escalier de 10 marches est le nombre de briques contenues dans la surface rectangulaire ainsi obtenue, soit 5×11=55. Elle généralise alors sa méthode en affirmant qu'on obtient le nombre nécessaire de briques en multipliant la moitié du nombre de marches de l'escalier par ce même nombre augmenté de 1. La formule produite collectivement par les élèves pour généraliser la « méthode de Manon » est $\left(\frac{n}{2}\right) \times (n+1)$. La procédure de résolution sous-jacente à la solution exposée par Manon, puis reprise par la classe, nous semble plus pertinente que les procédures évoquées dans la résolution du problème des « poignées de main ». En effet, l'identification d'un phénomène géométrico-numérique en jeu dans la situation est susceptible d'être généralisée et de justifier la formule produite. Elle peut toutefois paraître assez ambitieuse, puisqu'elle suppose un changement de point de vue conséquent sur le problème initialement posé (pour s'autoriser cette stratégie de découpage-recollement) et la mise en œuvre d'une dialectique entre les cadres numérique, géométrique et algébrique. Le fait est que seule Manon produit une telle solution dans la classe observée. De plus, la formulation de la procédure sous-jacente et son appropriation par une majorité d'élèves de la classe ne peuvent se faire sans un étayage fort de la part de l'enseignante et de la chercheuse concernées[5]. En outre, la généralisation correcte de cette procédure supposerait, comme dans le problème des « poignées de main », de distinguer le cas pair (traité par Manon) du cas impair (d'ailleurs envisagé par cette élève qui propose un autre découpage pour ce deuxième cas). Au vu des difficultés rencontrées par la majorité des élèves pour comprendre la « méthode de Manon » sur le seul cas pair, chercheuse et enseignante conviennent de ne pas engager la classe dans la recherche d'un procédé de même type pour le cas impair.

Il existe cependant une procédure géométrico-numérique qui évite la distinction des cas pairs et impairs, envisagée dans notre analyse *a priori* du problème des

5. L'enseignante a d'ailleurs expressément demandé à la chercheuse, première auteure de l'article, de revenir dans la classe à cet effet.

escaliers : il s'agit de remarquer qu'en accolant astucieusement deux escaliers de n marches, on obtient un rectangle de dimensions n sur $(n + 1)$, soit comportant $n \times (n + 1)$ briques.



Mais on introduit alors une figure non présente dans l'énoncé initial, ce qui paraît difficilement pouvoir émerger de l'activité mathématique des élèves. D'ailleurs, lors des expérimentations conduites autour du problème des « escaliers » dans le contexte de « Math.en.3B », cette méthode de résolution est toujours apparue à l'initiative du chercheur ou de la chercheuse ou, encore, de l'enseignant ou de l'enseignante concernés.

En rapprochant les observations et analyses relatives aux problèmes des « poignées de main » et des « escaliers », on peut remarquer que, si l'identification du phénomène numérique en jeu paraît accessible (assez directement pour les escaliers, par l'intermédiaire d'une simulation pour les poignées de main), sa généralisation et l'élaboration d'une formule demeurent délicates. Les connaissances sous-jacentes à une telle démarche de modélisation numérico-algébrique semblent difficilement accessibles pour des élèves de ce niveau. D'ailleurs, le caractère isomorphe de ces deux problèmes, c'est-à-dire la similitude du phénomène numérique en jeu, est rarement identifié par les élèves qui rencontrent les deux énoncés dans le dispositif. Le fait d'obtenir deux formules différentes dans la résolution de ces deux problèmes (qui provient du fait que l'on calcule la somme des n premiers entiers dans un cas et des $(n\text{-}1)$ premiers entiers dans l'autre) ne perturbe pas les élèves. La formule reste en quelque sorte « contextualisée » à l'habillage de chacun de ces problèmes. Ce constat renforce les résultats de nos analyses qui tendent à prouver que l'activité mathématique des élèves engagés dans la résolution de ces problèmes relève finalement peu (ou pas) de la généralisation et de la modélisation du phénomène numérique commun à ces deux énoncés. Les démarches qui conduisent les élèves à la production de formules ne permettent pas de mettre en fonctionnement les connaissances à même d'éclairer ou de justifier la modélisation, soit parce qu'elles sont difficilement accessibles pour une majorité d'enfants, soit parce qu'ils trouvent comment produire une formule dont ils présupposent l'existence, sans s'appuyer sur la généralisation du phénomène numérique pourtant à l'œuvre. Ainsi, si ces problèmes représentent en apparence des occasions de « trouver » des formules algébriques, nous pensons qu'ils sont loin d'en occasionner une production qui paraît pertinente au regard de la démarche de généralisation et de modélisation algébrique *a priori* visée.

Voyons maintenant ce qu'il en est pour un problème ne permettant pas d'aboutir à la production d'une formule algébrique, mais dont la résolution relève toutefois d'une démarche de généralisation de phénomènes numériques.

Étude d'un troisième problème : « la calculatrice cassée »

Ce problème a lui aussi été utilisé auparavant par P. Eysseric dans le cadre de ses ateliers de résolution de problèmes. Il a été proposé une première fois en 2007 à une classe de CM2 dans le cadre du dispositif « Math.en.3B », puis à plusieurs reprises à d'autres classes dans les années qui ont suivi :

J'ai à la maison une vieille calculatrice qui ne fonctionne plus très bien. Les seules choses que je peux encore lui faire faire sont +, -, 5 et 12. Quand je l'allume, l'écran indique 2007. Pouvez-vous m'aider à faire en sorte qu'il indique 2008? Si oui, comment?

La réponse experte à ce problème est fournie par l'identité de Bézout qui est plus précisément visée : « Soient a, b et c, des entiers relatifs. Il existe des solutions entières à l'équation ax + by = c si et seulement si c est un multiple de pgcd (a, b) » et que nous souhaitons faire formuler aux élèves à l'aide de cette recherche.

Dans un premier temps, en procédant par essais-erreurs, les élèves exhibent une ou plusieurs solutions du type 12+12+12-5-5-5-5-5-5-5, 5+5+5+5+5-12-12-12… Si la solution n'émerge pas spontanément, le chercheur ou la chercheuse incite à l'utilisation de l'écriture multiplicative afin d'améliorer la lisibilité des résultats. On obtient alors (3 × 12) - (7 × 5) et (5 × 5) - (2 × 12). C'est en proposant aux élèves de résoudre ce même problème avec un autre nombre affiché au départ sur l'écran qu'on les conduit à formuler un énoncé décontextualisé. Par exemple, dans une classe ayant effectué la recherche en 2007 avec la seconde auteure de l'article, les élèves énoncent :

> Le problème que nous cherchons à résoudre est : Comment faire +1 en utilisant 5, 12, + et -?

La chercheuse propose alors aux élèves d'étudier d'autres cas particuliers en remplaçant 5 et 12 par 2 et 4, 3 et 8, 4 et 11, 6 et 8, 12 et 15, 9 et 16, etc., qui permettent aux élèves de s'engager dans l'étude de différentes éventualités dans la généralisation du phénomène numérique à l'œuvre. Voici la retranscription d'un courrier électronique adressé par les élèves à la chercheuse à ce moment de la recherche et dans lequel on voit apparaître l'identification effective de cas différents et des ébauches de critères (notamment celui de la parité) liés à cette première étude de cas :

> Nous avons trouvé comme résultats :
> Avec 6 et 8, on ne peut pas faire + 1, parce que ce sont des nombres pairs.
> Avec 9 et 16 : (4 × 16) - (7 × 9)
> Avec 2 et 4, on ne peut pas faire + 1, parce que ce sont deux nombres pairs.
> Avec 4 et 11 : (3 × 4) - 11
> Avec 3 et 8 : (3 × 3) - 8
> Avec 15 et 12 : nous cherchons encore…

Pour guider les élèves vers une formulation de résultats qui permettent d'énoncer une généralisation du phénomène numérique et d'amorcer une justification de ce phénomène, la recherche est relancée par une nouvelle intervention de la chercheuse :

Si, dans certains cas, vous ne savez pas faire +1, quel est le plus petit nombre que vous réussissez à obtenir?

Dans la classe ayant expérimenté ce problème en 2007, les élèves écrivent ce message à la chercheuse :

- Avec 6 et 8 ou avec 2 et 4, on ne sait pas faire +1, mais +2. C'est sûrement parce que ce sont deux nombres pairs. On est dans la table de 2.
- Avec 12 et 15, on sait faire 3, et 12 et 15 sont dans la table de 3.
- Avec 3 et 9, on reste dans la table de 3, donc on ne fera pas mieux que 3.
- Avec 5 et 10, on ne pourra jamais faire + 1, car dans la table de 5 et dans celle de 10 le chiffre des unités est toujours 0 ou 5. On sait faire 5 car 10 – 5 = 5, et on ne pourra pas faire mieux.

Les élèves font référence aux tables de multiplication, outil disponible en fin de primaire. Ils commencent visiblement à repérer, par l'identification de multiples de 5 et de 2, que le plus petit nombre que l'on peut obtenir à partir des deux nombres donnés initialement correspond à un diviseur commun de ces deux nombres. Remarquons que les exemples cités ne mettent pas en avant le fait que le diviseur commun retenu est « le plus grand possible ». La dernière phrase du message témoigne pourtant d'une amorce significative de compréhension du phénomène numérique en jeu. Les élèves formulent, *in fine*, un énoncé qui généralise ce phénomène en prenant en charge les différents cas possibles à l'œuvre.

- Quand les deux nombres sont dans la table de 1 et seulement dans la table de 1, on sait faire +1.
- On cherche si les deux nombres sont dans la même table.
- Par exemple, 24 et 40 sont dans la table de 2, de 4 et de 8.
- On regarde la plus grande table : ici, c'est 8.
- Avec 24 et 40, on sait faire 8.

Depuis la mise en place du dispositif, le problème de « la calculatrice cassée » a été expérimenté à plusieurs reprises. Contrairement aux énoncés des « poignées de main » et des « escaliers », le problème de « la calculatrice cassée » ne vise pas *a priori* la généralisation d'un phénomène numérique pouvant conduire à produire une formule algébrique. Il s'agit en revanche de remarquer que le fonctionnement du phénomène numérique est conditionné par un paramètre, le *pgcd* des deux nombres, qui, bien que ne figurant pas aux programmes de l'école primaire, est accessible à ce niveau en évoquant les tables de multiplication. En effet, nos analyses *a priori* et *a posteriori* des situations didactiques attenantes montrent que, grâce à des connaissances numériques anciennes largement accessibles en CM2, les élèves sont à même d'entreprendre une généralisation du phénomène sous-jacent et, surtout, de s'engager d'eux-mêmes, sans nécessité de guidage fort de la part du chercheur ou de la chercheuse ou de l'enseignant ou de l'enseignante, dans l'étude des conditions de possibilité ou d'impossibilité liées à ce phénomène. Au final, le problème de la

« calculatrice cassée » nous paraît plus propice pour faire entrer une majorité d'élèves dans une problématique de modélisation algébrico-numérique que les deux problèmes précédents.

Discussion : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?

Les analyses des sujets de recherche expérimentés dans le contexte du projet « Math.en.3B » nous amènent à interroger le rôle des formules et de leur production dans la démarche de modélisation algébrique *a priori* visée. Comme les exemples des « poignées de main » et des « escaliers » en témoignent, tout se passe comme si la présence d'une formule ou son existence présupposée incitaient les élèves à la « trouver le plus vite possible », parfois à l'aide d'un unique fait numérique constaté. On peut d'ailleurs s'interroger sur les origines d'un tel phénomène didactique dans les représentations qu'ont les élèves, voire leurs enseignants, sur ce que recouvre une démarche de recherche et de résolution de problèmes en mathématiques : s'agit-il de trouver « les bonnes formules » ? Pour le moins, il semble que les problèmes de « Math.en.3B » qui conduisent à la production d'une formule fassent obstacle à une entrée pertinente dans la démarche de généralisation et de modélisation algébrico-numérique visée initialement. Des difficultés dans les justifications, les formulations ou les décontextualisations des procédures sont également constatées. Il faut bien entendu mettre en regard ces difficultés avec la nature des problèmes posés. Nos analyses montrent en effet que ceux des « poignées de main » et « des escaliers » rendent le processus de généralisation et de modélisation algébrique particulièrement délicat pour des élèves de fin du primaire. Rappelons à ce sujet qu'en s'engageant dans une collaboration avec les enseignants et les élèves, les chercheuses et les chercheurs étaient contraints de trouver des problèmes consistants, capables de résister à plusieurs mois de recherche, et que notre problématique de recherche n'a émergé qu'*après* la mise en œuvre de ce projet collaboratif. Il convient enfin de préciser que les résultats de notre recherche n'ont pas pour objet de remettre en question des tentatives d'enseignement précoce de savoirs algébriques et préalgébriques comme outil de généralisation à l'école primaire par la production de formules, tentatives dont le succès a du reste été éprouvé, entre autres par Radford (2010). Depuis, nous avons d'ailleurs cherché à proposer et à expérimenter de nouveaux problèmes dans le cadre du projet « Math.en.3B » à même de mettre en fonctionnement ce type de savoirs et de rendre la production de formules plus pertinente au regard de la démarche de modélisation algébrique visée. Les résultats de notre étude nous conduisent aussi à considérer une autre entrée possible dans l'enseignement des savoirs préalgébriques à l'école illustrée ici par l'exemple du problème de « la calculatrice cassée » : elle prend appui sur l'étude des conditions de possibilité ou d'impossibilité dans la généralisation de phénomènes numériques. Cette entrée nous semble également au cœur de la démarche de modélisation algébrique, à l'instar d'autres auteurs comme Barallobres (2004), et ce, d'ailleurs, d'une manière cohérente avec notre arrière-plan théorique initial (Chevallard, 1989; Gascon, 1995; Chevallard et Bosch 2012).

Conclusion

La recherche menée nous conduit à nous interroger sur la collaboration d'une équipe d'enseignants et de chercheurs autour d'un projet centré sur la résolution de problèmes. Notamment, elle nous incite à penser que les représentations initiales des élèves et des enseignants sur ce que représente une démarche de recherche en mathématiques ont, dans le cas présent, une influence certaine sur la mise en œuvre des situations expérimentées. Par exemple, « trouver la formule » dans le contexte de certaines de ces situations semble séduire les acteurs du projet bien plus que nous ne l'avions pensé au départ, et ce, au point de prendre parfois le pas sur des enjeux de connaissances que nous considérons *a priori* comme plus en lien avec des apprentissages relatifs à une démarche de recherche en mathématiques.

Références bibliographiques

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. Dans C. Margolinas *et al.* (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 15-25). Grenoble : La pensée sauvage.

BARALLOBRES, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24* (2/3), 285-328.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

BULF, C. *et al.* (2010). *La résolution de problèmes en questions : quels savoirs ou savoir-faire ? Quelle institutionnalisation ?* Actes du XXXVII^e colloque de la COPIRELEM, La Grande Motte (IUFM Montpellier).

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : Perspectives curriculaires. La notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 43-75.

CHEVALLARD, Y. et BOSCH, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Recherches en didactique des mathématiques.* Numéro spécial hors série *Enseignement de l'algèbre. Bilan et perspectives* (p. 19-39). Grenoble : La pensée sauvage.

COSTERMANS, J. (2001). *Les activités cognitives : raisonnement, décision et résolution de problèmes*. Bruxelles : De Boeck Université.

COULANGE, L. (1997). Les problèmes « concrets » à mettre en équations dans l'enseignement. *Petit x*, *19*, 33-58.

COULANGE, L. et REYDY, C. (2012). *La résolution de problèmes en questions : formulation des connaissances et institutionnalisation?* Communication au séminaire de didactique des mathématiques de l'IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes.

EYSSERIC, P. (2003). Ateliers de recherches en mathématiques. *Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques. Tome 1 – Apprentissage et diversité* (p. 137-156). Paris : ARPEME.

GASCON, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisé. *Petit x*, *37*, 43-63.

RADFORD, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. Dans M. F. Pinto et T. F. Kawasaki (dir.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 73-80. Belo Horizonte, Brésil : PME.

REYDY, C. *et al.* (2014). *Un problème ouvert en géométrie pour la formation des enseignants?* Actes du XLe colloque de la COPIRELEM, Nantes, 2013.