Revue des sciences de l'éducation

Le rapport caractérisation-validation dans une activité d'exploration en géométrie

Mustapha Ourahay, Claude Janvier and Richard Pallascio

Volume 22, Number 2, 1996

Les apprentissages mathématiques en situation

URI: https://id.erudit.org/iderudit/031886ar
DOI: https://doi.org/10.7202/031886ar

See table of contents

Publisher(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (print)
1705-0065 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Ourahay, M., Janvier, C. & Pallascio, R. (1996). Le rapport caractérisation-validation dans une activité d'exploration en géométrie. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 391–415. https://doi.org/10.7202/031886ar

Article abstract

This article presents the results of a study of secondary level students' difficulties in producing geometry demonstrations. This problem is examined within an exploratory frame and is based on an analysis of links between the characterization of mathematical objects and the development of mathematical validation. The experimental treatment proposed illustrates the role of manipulation in representing objects and in developing mathematical validation.

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXII, n° 2, 1996, p. 391 à 415

Le rapport caractérisation-validation dans une activité d'exploration en géométrie

Mustapha Ourahay
Professeur
GREDIM,
ENS de Marrakech

Claude Janvier
Professeur et chercheur
CIRADE,
Université du Québec à Montréal

Richard Pallascio
Professeur et chercheur
CIRADE, Université du Québec à Montréal

Résumé – Cet article présente la synthèse d'une étude sur les difficultés des élèves du secondaire à produire des démonstrations en géométrie. Il aborde ce problème dans un cadre d'exploration et à partir d'une analyse du rapport liant le raffinement de la caractérisation des objets mathématiques au développement de la validation mathématique. Le traitement expérimental proposé pour résoudre ce problème illustre le rôle que joue la manipulation dans le raffinement de la caractérisation des objets et dans le développement de la validation mathématique.

Introduction

Plusieurs enseignants marocains constatent que la majorité de leurs élèves sont incapables de produire des démonstrations, en particulier en géométrie. Cette incapacité ne se limite pas au cadre scolaire marocain. Dans sa thèse d'état, Balacheff (1988) souligne que les élèves français et américains éprouvent d'énormes difficultés à produire des démonstrations. Ce problème est, à notre avis, très sérieux et il est judicieux de nous demander quelles sont les causes de ces difficultés et quel type d'enseignement on doit adopter.

Pour contribuer à la résolution de ce problème, nous avons mené une recherche auprès des élèves marocains âgés de 13 à 16 ans. Cette recherche relie l'activité mathématique de démonstration et l'activité pédagogique d'exploration, en tant qu'activité pédagogique. Nous avons essayé de voir comment on peut développer la validation chez un élève en nous basant sur l'organisation de certaines activités d'exploration.

Problèmes abordés par la recherche

On remarque une grande variété d'orientations dans les recherches qui portent sur le développement de la capacité de démontrer chez des élèves de l'ordre secondaire d'enseignement. Ces orientations peuvent être groupées au moins en trois catégories de recherches.

Premièrement, les travaux de Duval et Erget (1989) touchent à l'organisation du discours démonstratif et à son fonctionnement. Ils soulignent la présence d'une organisation symbolique dans la démonstration. Ils postulent que démontrer consiste, d'un point de vue cognitif, à transformer un énoncé donné au départ (ou plusieurs) en un énoncé-résultat par une ou plusieurs substitutions. Cette catégorie de recherches soutient qu'il faut distinguer entre une activité de démonstration et une activité de résolution de problèmes.

Deuxièmement, les travaux de Van Hiele regroupés par Fuys, Geddes et Tishler (1984) et le mémoire de Braconne (1987) traitent la démonstration sous la problématique des niveaux. Ces travaux se réfèrent au modèle de Van Hiele, un modèle d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie. Le modèle de Van Hiele peut se résumer ainsi: pour démontrer, il faut d'abord des propriétés et des théorèmes. Pour avoir ces propriétés, il faut d'abord des définitions. Pour avoir des définitions, il faut d'abord des objets à définir et ces objets sont reconnaissables par leurs formes.

Troisièmement, les travaux de Balacheff (1982, 1988) mettent l'accent sur les aspects heuristiques et sociaux de la démonstration. L'auteur traite la démonstration dans un contexte de résolution de problèmes. Il établit une distinction entre une preuve et une démonstration, et un cheminement pour le développement de l'habileté à produire des preuves. Pour l'auteur, ce développement passe de l'explication à la démonstration, en dépassant le stade de la preuve. Il définit l'explication par tout discours tenu par une personne visant à rendre intelligible à autrui la vérité d'un énoncé mathématique déjà acquis pour le locuteur (Balacheff 1988, p. 28). Pour lui, la preuve est une explication reconnue et acceptée par une communauté. Quant à la démonstration, il la définit comme étant la seule preuve acceptée par la communauté des mathématiciens.

Ces recherches partent des mathématiques toutes faites et de l'organisation euclidienne de la géométrie. Elles considèrent la démonstration comme un discours argumentatif caractérisé par la présence de la substitution. Elles séparent la démonstration de la définition. Elles admettent que la caractérisation des objets se fait d'une manière uniquement expliquée par les relations maître-élève et non par la nécessité de les utiliser dans des entreprises de démonstration. Autrement dit, il n'est pas faux de dire que la démonstration exige des caractérisations et que, dans ce sens, la démonstration nécessite la définition, sauf qu'on définit un objet uniquement en fonction de la manière dont on veut l'utiliser; la caractérisation d'un objet mathématique dépend de l'utilisation que l'on en fait.

Nous adoptons la distinction qu'a faite Balacheff entre preuve et démonstration tout en nous référant à la démonstration qui soutient les mathématiques d'enseignement. Grâce à cette précision, nous voulons souligner, d'une part, qu'il faut distinguer entre la démonstration des mathématiques savantes et la démonstration des mathématiques d'enseignement et, d'autre part, que nous nous écartons de la position de Balacheff qui consiste à traiter la démonstration en enseignement tout en se référant à la démonstration qui soutient les mathématiques savantes. Nous voulons noter que, dans l'enseignement, la démonstration est une preuve composée uniquement de résultats construits et des modes de raisonnement acceptés par une communauté qui est la classe.

Cadre théorique

Rappelons que nous ramenons le traitement de l'incapacité des élèves à produire des démonstrations à une étude du développement de la validation à l'aide des activités pédagogiques d'exploration. Notre principale question de recherche est: «Comment peut-on structurer l'exploration pour amener l'élève à raffiner les éléments auxquels il se réfère dans une production de preuves?»

Notons que, d'un côté, toute explication, au sens de Balacheff, est fondée sur ce que le locuteur a construit comme caractérisations des objets mathématiques introduits dans son discours. De l'autre côté, toute activité d'exploration est soutenue par ce que l'explorateur a comme caractérisations ou représentations de l'objet à explorer. La validation et l'exploration sont alors inséparablement liées à la caractérisation des objets. Ainsi, nous ramenons cette étude au traitement du rapport liant la caractérisation des objets mathématiques au développement de la validation dans un cadre d'exploration. Le traitement de notre sujet exige que nous explicitions d'abord ce que nous entendons par l'exploration, le cadre pédagogique dans lequel sera traité le rapport entre la caractérisation et la validation.

Qu'est-ce que l'exploration?

L'exploration est souvent construite autour de l'utilisation d'objets matériels ou semi-concrets, par exemple le dessin. Elle suppose chez celui qui explore des connaissances mathématiques concrètes. Chez l'enseignant, elle sous-entend une organisation de ses interventions pour orienter l'exploration de l'élève vers ce qu'il veut que l'élève explore. Pour cerner cette activité d'exploration, il nous paraît pertinent de la présenter sous des aspects différents.

— L'aspect didactique

Pour nous, l'exploration se présente chez les élèves comme une activité de manipulation. Elle suppose une situation à explorer et un outil d'action. Elle est caractérisée par la présence de séquences de «prospection libre» pendant lesquelles l'élève agit de façon libre selon son interprétation de la tâche et son intention personnelle, mais aussi par des interventions intentionnelles pendant lesquelles l'enseignant intervient pour guider ou orienter l'exploration de l'élève vers ce qu'il est prévu d'explorer.

— L'aspect cognitif

L'activité pédagogique d'exploration permet à l'élève de structurer et de caractériser les objets qu'il explore, d'acquérir une nouvelle connaissance, de se familiariser avec cette connaissance nouvellement acquise, de l'utiliser dans des contextes différents, de l'appréhender et d'être capable de la décontextualiser afin de pouvoir l'appliquer dans de nouvelles situations.

L'exploration, comme processus, nécessite un minimum d'analyse, de conceptualisation et de réflexion sur l'action. Ce processus d'exploration est individuel et il est difficile de le contrôler de l'extérieur. En revanche, il demeure possible d'organiser la tâche d'exploration, de structurer son déroulement, afin de cerner *a posteriori* ce processus qui se manifeste pendant les séquences de prospection libre et d'intervenir en conséquence d'une façon intentionnelle et ceci, en fonction de ce qu'on veut que l'élève explore.

— L'aspect épistémologique

La présence d'activités pédagogiques d'exploration dans une situation d'enseignement-apprentissage suppose que, d'une part, toute connaissance résulte d'une mise à l'épreuve et que, d'autre part, la fréquence – il ne s'agit pas de répétition parce qu'on a, à chaque fois, un changement de système de contraintes qui représente la situation – de mise en œuvre d'une connaissance ou d'une procédure heuristique, dans des contextes différents, est une circonstance favorable à son élaboration. Ainsi, «les connaissances et les procédures qui auront le plus de chance d'être les plus fréquemment utilisées seront les premières à être acquises» (Brousseau, 1979, p. 59).

La caractérisation et la validation dans un cadre d'exploration particulier

Nous avons choisi de traiter notre sujet dans un cadre d'exploration centré sur la construction de polygones matérialisés. Nous avons choisi d'utiliser un matériel qui permet de produire des figures par des transformations dynamiques parce que, d'une part, nous voulons nous écarter du contexte scolaire afin de réduire l'impact de la pratique scolaire sur l'étude du problème et que, d'autre part, comparativement à la figure sur papier, une figure matérialisée permet de situer les objets géométriques sur un plan plus expérimental que théorique.

— La figure matérialisée comme cadre d'exploration particulier

Pour construire des activités d'exploration, nous avons préféré travailler dans un contexte où les figures seront représentées par un matériel didactique. Avec ce matériel, nous voulons centrer l'exploration sur une activité de transformation d'objets physiques représentant des objets géométriques. Nous considérons la figure matérialisée comme à la fois un outil d'exploration et comme une représentation concrète d'un objet géométrique abstrait; elle se porte à des opérations ou à des actions et elle représente les états de ces opérations. Dans ce contexte de construction d'objets géométriques, la validation que l'élève produit pour prouver (ou s'assurer) qu'il a construit un objet géométrique donné dépend de ce que cet élève utilise comme caractérisation de l'objet à construire.

Pour un élève débutant, l'activité de construction n'est pas soutenue par une théorie; elle est souvent un enchaînement d'actions, alimentées par une théorie de l'action. Par exemple, l'activité de construction peut être structurée en termes de procédures gestuelles. Cette théorie relève de la pratique quotidienne et elle est fondée à la fois sur les possibilités que le matériel peut faire émerger et sur l'observation. Cela n'empêche pas de théoriser cette pratique et de faire abstraire ces constructions.

— La caractérisation et la construction d'objets géométriques

Précisons que la caractérisation d'un objet peut être un «concept image» (Tall et Vinner, 1981), une conception ou image mentale (Janvier, 1987), un schème (Vergnaud, 1990), etc. Elle peut se traduire dans une forme verbale (définition) ou sous une forme opérationnelle (procédure).

Par rapport à notre position, la notion de conception est vue sous l'angle d'un savoir mathématique. Elle est ce que l'élève construit comme connaissance par rapport à un concept mathématique. Nous utilisons la caractérisation au lieu de la conception parce que nous mettons l'accent sur les éléments fonctionnels ou opératoires d'une conception. Ainsi, nous avons pris le terme caractérisation, au lieu de «conception», parce qu'il permet de mettre au premier plan le caractère opérationnel et parce qu'il se prête à une association avec la procédure (Ourahay, 1989).

Une procédure de construction est une suite d'actions. Elle est caractérisée par une stabilité locale et elle suppose la présence d'une cohérence sous-jacente à son fonctionnement. Cette cohérence est contrôlée par une caractérisation de l'objet à construire qui règle l'action. Elle est organisée sous forme d'entités qui peuvent être de l'ordre mathématique tels le parallélisme et l'égalité des côtés opposés, de l'ordre psychologique telle la dominance du vertical et de l'horizontal, de l'ordre de l'action physique tel le maniement du matériel utilisé pour la construction.

Dans l'activité de construction d'un élève, il y a un contrôle de ses actions en vue d'atteindre sa représentation du but. Dans son activité de construction, l'élève révèle sa représentation du but et les moyens de contrôler son activité de construction. Ainsi, nous distinguons trois choses: la représentation qu'a l'élève de l'objet géométrique à construire, l'objet matériel qu'il a construit et qui correspond à sa représentation de l'objet géométrique à construire et les moyens de contrôle utilisés pendant la construction de l'objet matériel. La caractérisation, c'est la représentation que l'on a de l'objet à construire. Dans une activité de construction, elle peut donner lieu à un ensemble des moyens de contrôle de la construction et des moyens de validation du produit de l'acte de construire.

— La caractérisation et la validation

Nous décomposons une activité de construction d'un objet géométrique en deux parties: l'acte de construire et le produit de la construction. Cette décomposition nous permet de distinguer la validation sous-jacente à la construction à «un contrôle de l'acte de construire» et la «validation du produit de la construction». Dans ce type d'exploration structurée, qui est une sorte d'activité de construction d'objets géométriques, l'acte de construire est un acte réfléchi qui vise à reproduire la représentation de l'objet à construire. Quant à la validation du produit d'une construction, c'est une démarche de l'esprit se rapportant à la ressemblance entre ce que l'on a produit comme résultat de la construction et ce que l'on a comme conception de l'objet à construire. Soulignons que le contrôle de l'acte de construire ne tient pas compte du produit de l'acte; il s'agit d'une validation qui se base sur une analyse *a priori*. En revanche, la validation du produit se base en premier lieu sur le produit et elle se réfère à une sorte d'analyse *a posteriori*.

Notons que l'action à laquelle nous nous référons n'a pas le même rôle ni le même statut que celle qu'un élève peut utiliser dans des activités de mesure, de découpage, de dénombrement, etc. Devant une activité de construction d'un objet géométrique, l'élève doit, d'une part, produire une série d'actions qui permettent de générer un objet matériel qui correspond à sa caractérisation de l'objet géométrique à construire et, d'autre part, s'assurer de la correspondance entre l'objet matériel en construction et sa caractérisation de l'objet géométrique en question. L'activité de construction est alors soutenue par une caractérisation et une validation. Cette validation peut se manifester par un contrôle des actions qui constituent l'activité de construction, par une vérification du produit construit ou par les deux en même temps.

Méthodologie

Cette méthodologie consiste à construire une expérimentation favorisant l'observation. Elle est caractérisée par un schéma expérimental basé sur des «réalisations didactiques». Elle est fondée, d'une part, sur une analyse préalable du phénomène qui est traité dans le cadre théorique et, d'autre part, sur une analyse *a priori* des épreuves de l'expérimentation et de la performance attendues des élèves.

Nous traitons le rapport caractérisation-validation d'un point de vue cognitif avec une incidence didactique. D'après une position constructiviste, ce rapport est avant tout interne et personnel. Afin de mieux cerner ce rapport, il serait pertinent de nous centrer sur les phénomènes de construction de connaissances, sur le sujet, sur le contenu de l'expérimentation et sur son déroulement. Ainsi, il serait préférable de choisir la situation individuelle comme modalité pour administrer aux élèves les épreuves de l'expérimentation.

Comme il s'agit de l'étude d'un phénomène en évolution qui n'est pas structuré en termes de variables à faire valider, le traitement du rapport exploration-preuve sera basé sur une validation interne qui confronte l'analyse *a priori* à l'analyse *a posteriori* (l'analyse des données). Cette validation interne remet tout en question pendant qu'elle recherche une entente entre les analyses *a priori* et *a posteriori* (Artigue, 1988).

Un cadre expérimental pour traiter la caractérisation et la validation

Ce cadre expérimental se compose de deux épreuves d'exploration tirées de la partie expérimentale de notre thèse de doctorat (Ourahay, 1995). Il favorise l'utilisation de la perception visuelle (ou figurative) et de l'action manipulatoire, à la fois comme des moyens de contrôle, de validation et de support à l'abstraction. Son objectif principal est de relever les indices pertinents qui peuvent nous aider à comprendre le rapport caractérisation-validation.

La construction des deux épreuves d'exploration est fondée sur une utilisation d'un matériel didactique permettant de soutenir l'activité d'exploration. Nous avons choisi deux types de matériels:

1) deux tiges de longueurs égales liées par deux élastiques de même longueur et de même élasticité pour l'épreuve d'exploration Tige-Élastique (TE);
2) quatre punaises et une corde fermée pour l'épreuve d'exploration Corde-Côté (CC).

L'épreuve Tige-Élastique (TE)

— La description

Le matériel utilisé est constitué de deux tiges de forme rectangulaire et de même longueur et de deux élastiques de même longueur et de même élasticité. La longueur des élastiques est plus petite que celle des tiges. Chacune des tiges est munie de deux vis à ses extrémités pour y accrocher les élastiques afin de former un quadrilatère dont les côtés sont formés des deux tiges et des deux élastiques. Ce dispositif permet de générer des quadrilatères ayant deux côtés opposés de longueurs fixes et isométriques. Dans cette famille de quadrilatères, on se limite aux rectangles, éventuellement aux parallélogrammes. Le déroulement de cette épreuve sera centré sur la construction des rectangles.

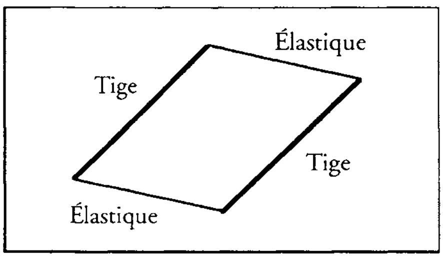

Figure 1 – Le dispositif expérimental de l'épreuve Tige-Élastique

— Les objectifs

Nous avons conçu cette épreuve d'exploration pour caractériser le rectangle et le carré en les situant dans un espace géométrique considéré comme homogène. Cette épreuve suit une démarche d'exploration qui permet d'introduire le carré comme l'aboutissement d'une série de déformations de rectangles. Un des buts de cette épreuve, c'est d'amener l'élève, par le biais de la déformation de deux côtés opposés, à enrichir sa caractérisation institutionnelle des objets rectangle et carré.

— Questions qui guident le déroulement de TE

L'exécution des tâches de cette épreuve est fondée sur l'utilisation de l'étirement; l'élève ne peut pas continuer à exécuter cette épreuve s'il n'utilise pas l'étirement des côtés élastiques.

Nous présentons à l'élève deux tiges de même longueur reliées aux extrémités par des élastiques de même longueur, de sorte que, s'il étire une des tiges parallèlement à l'autre, il aura un parallélogramme. Ensuite, nous demandons ceci à l'élève:

- Peux-tu construire un rectangle avec ces tiges et les élastiques? (voir s'il a une caractérisation du rectangle)

Dans le cas où il réussit à le construire:

- Peux-tu en construire un autre?
- Qu'est ce qu'un rectangle?

Dans le cas où il n'arrive pas à le construire:

- Qu'est-ce qu'un rectangle?
- Peux-tu construire une figure ayant les propriétés que tu viens d'annoncer?
- Peux-tu en construire une autre?

La suite pour les deux cas:

- Combien de rectangles peux-tu construire?
- Construis-en quelques-uns?
- Prenons le cas où les élastiques sont étirés au minimum. Est-ce que c'est un rectangle?
- Si on étire les élastiques un peu, est-ce que la forme demeure un rectangle?
- Y a-t-il des carrés parmi ces rectangles?
- Combien de carrés peut-on obtenir?
- Est-ce qu'un carré est un rectangle?

— L'analyse *a priori* de TE

Dans cette épreuve d'exploration, la construction de rectangles est soutenue par l'étirement des côtés élastiques et par l'orientation des côtés dans l'espace. Cette épreuve n'offre à l'élève, comme moyen de validation de la construction (s'assurer de l'obtention d'un rectangle), que la perception de la forme. La structure de cette épreuve impose à l'élève de n'utiliser que la caractérisation des quadrilatères par l'égalité ou le parallélisme des côtés opposés. Le traitement de la forme par la perception ne peut donc se baser que sur le côté. Ce type de traitement perceptuel privilégie certaines positions de la forme ou de la figure, par exemple les directions verticale ou horizontale des côtés. En effet, ces directions permettent à la forme «rectangle» d'être facilement perçue (validée par la perception); ces directions sont facilement identifiées par la perception et, en plus, leur présence permet de passer l'aspect orthogonal, le parallélisme et l'égalité des côtés opposés comme un fait.

Dans le contexte dit «ordinaire» de l'enseignement des mathématiques, le carré n'est pas un rectangle pour la plupart des élèves du secondaire. Nous soutenons que caractériser le carré par quatre côtés égaux et quatre angles droits (et uniquement par ces propriétés), c'est l'éloigner du rectangle, tandis que caractériser le carré comme étant une position limite de rectangles, c'est le rattacher au rectangle. Alors, notre hypothèse est que ces élèves distinguent le carré du rectangle uniquement parce qu'ils n'ont pas réalisé d'explorations pertinentes. Ainsi, nous sommes intéressés à examiner jusqu'où les élèves vont accepter l'idée qu'un carré est un rectangle par rapport à notre contexte d'exploration.

Le fait d'avoir deux tiges isométriques opposées et deux élastiques pourrait porter les élèves à concevoir le rectangle comme étant formé de deux segments isométriques, parallèles et face à face; à comprendre le carré comme étant deux tiges face à face, de même longueur et qui sont éloignées d'une distance égale à leur longueur. Cette caractérisation du carré permet à l'égalité des côtés d'incorporer une action (l'éloignement). Ainsi, cette exploration, qui fait appel à des côtés de nature différente, donne un statut spécial à la «propriété de quatre côtés égaux».

Dans cette épreuve d'exploration, la famille des rectangles peut être envisagée comme un ensemble d'objets statiques ayant des propriétés communes. L'élève peut construire plusieurs rectangles en recommençant toujours ses constructions à partir du point de départ, en se basant davantage sur la variation de sa position spatiale du rectangle que sur la variation de sa dimension.

Par la forme rectangulaire des deux tiges, l'élève peut valider la présence de l'orthogonalité dans ses configurations géométriques par la position verticale des tiges sur la table de travail ou par leur position horizontale et parallèle à un des bords de la table de travail.

L'épreuve d'exploration de la corde et du côté fixe (CC)

— La description de l'épreuve

Le matériel est constitué d'un carton de forme rectangulaire, de quatre punaises et d'une corde fermée. L'expérimentateur fixe deux punaises sur le carton comme étant les deux extrémités d'un côté d'un quadrilatère. L'épreuve consiste à demander à l'élève de placer les deux autres punaises et la corde pour former un parallélogramme en gardant les deux premières punaises fixes. Ainsi, ces deux punaises fixes déterminent les extrémités d'un côté et les autres punaises à placer déterminent le côté opposé, la longueur de la corde étant le périmètre du rectangle à construire.

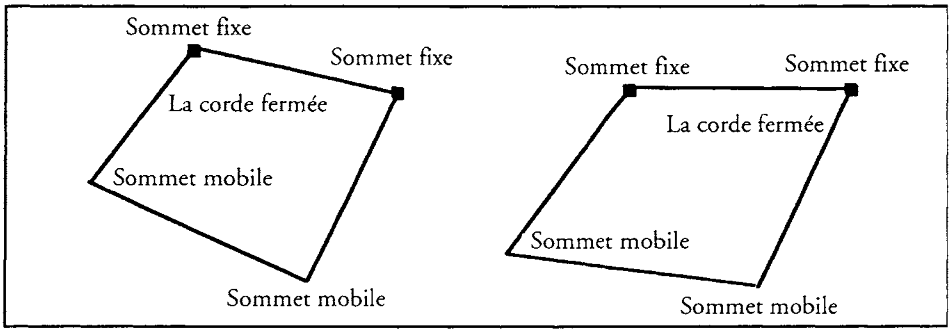

Figure 2 – Le dispositif expérimental de la modalité CC

— Les objectifs

Cette épreuve favorise la caractérisation des objets dans le plan. Elle permet de rapprocher l'activité d'exploration du contexte dominant dans l'enseignement actuel; celui-ci se réfère à la représentation de la figure plane sur le tableau ou sur la feuille de papier.

Un des buts de cette épreuve est d'identifier certains indices concernant le rapport entre l'aspect figuratif des objets géométriques et l'exploration. Nous voulons savoir jusqu'où l'aspect figuratif influence une activité d'exploration. Nous désirons aussi amener l'élève à enrichir et à élargir sa caractérisation institutionnelle des objets parallélogramme et rectangle. Pour cela, nous allons essayer d'amener l'élève, par le biais de la déformation, à caractériser la famille des parallélogrammes ayant un périmètre et un côté fixes.

— Les questions qui guident le déroulement de CC

L'expérimentateur présente à l'élève deux punaises fixées sur un carton d'une forme rectangulaire. Ces punaises forment un segment incliné par rapport aux bords du carton. Il lui présente aussi une corde fermée (le périmètre est fixe) et deux autres punaises non fixées, puis il demande à l'élève:

– Construis, avec la corde et ces deux autres punaises, un parallélogramme ayant les punaises fixées comme étant les extrémités d'un côté et la longueur de la corde comme étant son périmètre.

S'il arrive à construire un parallélogramme:

– Peux-tu en construire un autre?

S'il n'arrive pas à construire un parallélogramme:

– Qu'est-ce qu'un parallélogramme?

– Peux-tu construire une configuration qui remplit les propriétés que tu viens de citer?

– Peux-tu en construire une autre?

La suite pour les deux cas:

– Combien peux-tu en construire?

– Y a-t-il des rectangles parmi ces parallélogrammes?

– Combien de rectangles?

– Est-ce qu'un rectangle est un parallélogramme?

— Analyse *a priori* de CC

Cette épreuve ramène les objets à la figure, car les manipulations sont effectuées sur un plan représenté par un carton rectangulaire. Elle confronte l'élève aux positions relatives des objets dans le plan. Ainsi, nous estimons nécessaire de jouer sur des composantes figuratives reliées à l'emplacement de l'objet dans ce plan. Nous avons choisi de jouer sur l'emplacement d'un côté par rapport au cadrage du carton. Nous avons choisi un côté incliné. Autrement dit, les deux punaises fixes forment un segment qui n'est pas parallèle au cadrage du carton. Cette épreuve conduit à générer une famille de quadrilatères ayant un côté fixe et un même périmètre. Le questionnement limite les élèves à la famille des parallélogrammes.

Nous supposons que l'élève va privilégier les directions horizontale ou verticale pour le côté d'un quadrilatère parce qu'elles sont les directions les plus souvent utilisées et présentes dans la pratique scolaire comme dans l'environnement. En fonction de cette centration de l'élève sur lui ou sur le cadrage, l'horizontal sera défini soit par rapport aux bords du carton, soit par rapport à l'angle d'observation.

Les manipulations principales ou visées de cette épreuve d'exploration sont celles par lesquelles l'élève déplace deux sommets pour avoir le parallélisme et l'égalité des côtés opposés. Les deux sommets sont déplacés soit en même temps, soit séparément. Les principales manipulations rattachées au déplacement simultané des deux sommets (et qui génèrent la famille de parallélogrammes) sont soutenues par des mouvements de rotation qui permettent de maintenir le parallélisme ou l'égalité des côtés opposés. Ce type de mouvement permet une caractérisation de la famille en question comme celle des parallélogrammes générés par une rotation de deux côtés opposés par rapport aux extrémités d'un côté fixe (le mouvement des essuie-glaces). En revanche, les manipulations dans lesquelles les deux sommets sont déplacés séparément sont dues à un ajustement statique de la figure par un processus d'approximations successives. Ces dernières manipulations présentent beaucoup plus de difficultés chez les élèves.

La famille des parallélogrammes peut être produite par une déformation de type «mouvement des essuie-glaces». Dans cette épreuve d'exploration, quand on déplace les sommets en gardant la corde étirée, la corde se déplace aussi; ainsi, un élève peut voir la configuration comme si elle est en train de se transformer entièrement, tout en ne présentant aucun invariant. À cause de cela, il peut rencontrer des difficultés à concevoir un mouvement qui conserve le parallélisme des côtés opposés.

Analyse des résultats

Ces deux épreuves d'exploration ont été administrées à trois élèves (Amz, Alf et Dad), rencontrés sur une base individuelle, d'une classe de la troisième année de l'enseignement de l'ordre secondaire. Elles se sont effectuées en arabe, la langue d'enseignement, pendant les heures libres de la classe. Tous les élèves ont commencé par l'épreuve TE.

Le déroulement de ces épreuves n'a pas été le même pour tous les élèves. Les interventions n'ont pas été standardisées, car elles font partie intégrante de l'exploration et ont pour but de guider ou d'orienter l'exploration. Le déroulement se présente comme un ensemble d'interactions de l'élève avec l'objet géométrique à construire, dans un système de contraintes qui constituent pour lui la situation d'exploration. L'intervention n'est qu'une contrainte particulière.

Cette analyse ressemble à une analyse de cas; chacun des sujets est un cas parce que le déroulement n'est pas identique pour tous les sujets. Dans cette analyse, nous essayons d'identifier les éléments auxquels les élèves se rapportent pour contrôler leur construction et pour s'assurer de l'obtention du quadrilatère visé.

L'analyse des résultats de l'épreuve d'exploration TE

— La dominance des directions verticale et horizontale et l'utilisation de l'étirement pour générer des rectangles

Soulignons que l'orientation des côtés, dans la manipulation, fait référence aux côtés «tiges» parce qu'ils sont rigides et que l'étirement, comme manipulation et comme son contrôle font aussi appel aux tiges, cet étirement étant généré par le déplacement de celles-ci. Elles ont ainsi un rôle dominant dans l'exploration, la caractérisation et la perception du rectangle. Soulignons que tous les élèves se sont référés aux directions horizontale et verticale pour contrôler la construction et valider leur produit.

L'élève Amz assure l'obtention d'un rectangle par une position verticale des côtés tiges (l'égalité des tiges est une donnée), par une position horizontale des côtés élastiques et par l'inégalité des mesures d'un côté horizontal et d'un côté vertical. L'orthogonalité n'est autre qu'une présence simultanée des deux directions, verticale et horizontale. L'égalité des côtés opposés est une conséquence de la présence de ces directions horizontale et verticale.

Pour construire un rectangle, l'élève Dad fait appel au caractère plane et horizontal de la table (il pose les tiges verticalement sur la table) et à la verticalité des tiges. En appuyant les tiges sur la table, l'élève Dad s'assure de l'obtention d'une direction horizontale.

Quant à Alf, il utilise l'étirement maximal pour rendre les côtés élastiques rigides et pour obtenir l'égalité de leurs longueurs. Par cet étirement, il ramène la construction du rectangle à l'obtention des directions verticale et horizontale des côtés du quadrilatère. De cette façon, il contrôle et valide le rectangle par la présence des directions verticale et horizontale des côtés.

Pour former des rectangles, les élèves Dad et Alf essayent d'ajuster les côtés en se centrant sur les tiges; ils n'utilisent pas l'étirement des côtés élastiques comme un moyen pour construire des rectangles; celui-ci est plutôt utilisé pour ajuster les directions des côtés «tiges». Ces élèves affirment qu'ils ne peuvent construire que deux rectangles: un rectangle aux tiges verticales et un autre aux tiges horizontales. Donc, pour eux, l'exploration guidée selon TE ne les conduit pas dans un premier temps à se donner une famille de rectangles aux côtés parallèles et congrus. Le tableau ci-dessous résume cette partie de l'exploration du rectangle.

Tableau 1
Exploration du rectangle (TE)

TE	Caractérisation du rectangle	Conception du matériel	Moyen de contrôle et de validation de la direction du côté	Étirement des élastiques
Amz	– côté horizontal (CH) – côté vertical (CV) – longueur CH diffère de longueur CV	– homogène	– perception	– génère des rectangles
Dad	– côté horizontal (CH) – côté vertical (CV)	– rigide	– perception – horizontalité de la table pour assurer la direction horizontale	– ajuste les directions des tiges par rapport à la table
Alf	– tiges verticales (resp. horizontales) – élastiques verticaux (resp. horizontaux)	– rigide	– perception – étirement maximal des élastiques	– garde rigides les côtés élastiques

— L'exploration du rapport rectangle-carré

Pour construire un carré, Amz utilise l'étirement des élastiques uniquement pour rendre la longueur des côtés élastiques égale à celle des tiges. Sa construction du carré ne passe pas par une transformation de rectangles.

Comme réponse à la question «Est-ce que le carré est un rectangle particulier?», cet élève dit que le carré n'est pas un rectangle parce que, d'une part, ces deux figures portent deux noms différents et que, d'autre part, les côtés contigus du carré sont égaux alors que ceux du rectangle sont différents.

L'introduction du carré, à la suite d'une exploration de rectangles, a permis à l'élève Amz de trouver un moyen pour séparer le carré du rectangle et ainsi distinguer entre l'égalité et l'inégalité des côtés contigus. Le fait d'avoir des tiges et des élastiques offre à cet élève une possibilité de superposer un côté sur un autre qui lui est contigu en utilisant la rotation d'une tige par rapport à une de ses extrémités. Cette superposition est analogue à un report de longueur par le compas.

Dans le rectangle, Amz utilise uniquement sa perception pour valider l'inégalité entre la longueur et la largeur d'un rectangle, alors qu'il utilise pour le carré une procédure pour valider l'égalité des côtés. Ces indices permettent de supposer que la validation de l'égalité des côtés contigus par une procédure et que l'absence de validation de l'inégalité entre la longueur et la largeur par la perception proviennent du fait que l'égalité des côtés contigus a une seule possibilité, alors que leur inégalité est toujours présente sauf dans un seul cas, celui de l'égalité. De plus, l'élève peut facilement choisir une situation où l'inégalité des côtés contigus est facilement perceptible. Au moyen de cette procédure, l'élève essaye d'isoler l'égalité des côtés contigus des situations d'inégalité des côtés contigus.

Rappelons qu'Alf conçoit l'étirement dans son état final et la transformation de rectangles par étirement comme étant une suite finie de rectangles qui se termine par le carré. Il distingue le rectangle du carré par l'égalité entre la longueur et la largeur. Cet élève se réfère uniquement à la perception pour distinguer entre le carré et le rectangle. Il construit le carré par une restriction de la longueur des côtés élastiques et s'assure de son obtention quand il voit que les côtés contigus sont égaux. Cet élève conçoit l'égalité des côtés contigus comme l'extrémité d'une chaîne de situations des inégalités de côtés contigus.

Quant à l'élève Dad, il caractérise le rectangle par la direction verticale ou horizontale et le parallélisme des côtés rigides. Il conçoit l'étirement comme étant un générateur de rectangles et comme une sorte de transformation dynamique et continue. Comme le carré est issu de cet étirement, il ne peut être qu'un rectangle particulier. Autrement dit, le carré est un rectangle parce qu'on peut le construire par un procédé qui permet de construire les rectangles. Il situe le carré à l'intérieur d'une suite de transformations de rectangles. Il établit une sorte de continuité dans le passage du rectangle au carré. Le tableau 2 expose une synthèse relative au rapport rectangle-carré.

Tableau 2

Rapport rectangle-carré (TE)

Carré rectangle	Étirement qui conserve le parallélisme des côtés opposés	Rectangle-carré	Validation
Amz	– statique – ne tient pas compte de l'état initial de la transformation: c'est un ensemble fini d'états indépendants	– l'étirement ne relie pas le carré au rectangle; – les deux quadrilatères portent deux noms différents; – le rectangle a des côtés contigus de longueurs inégales; – le carré n'est pas un rectangle.	– le report de distance par la superposition valide l'égalité des côtés contigus; – l'égalité est une limite de l'inégalité.
Dad	– dynamique – un procédé de construction de rectangles	– la caractérisation du rectangle est centrée sur la direction des côtés et sur leur parallélisme; – le carré se construit par un procédé de construction de rectangles.	– la perception valide l'égalité des côtés contigus.
Alf	– statique – génère une suite finie de rectangles	– l'étirement du rectangle génère une suite finie de rectangles qui se termine par le carré; – le rectangle a des côtés contigus de longueurs inégales; – le carré n'est pas un rectangle.	– la perception valide l'égalité des côtés contigus.

D'un côté, l'exploration guidée du rapport rectangle-carré a conduit les élèves à enrichir leurs caractérisations initiales. En effet, l'introduction du carré, à la suite d'une exploration de rectangles, a permis à Amz de construire une procédure qui lui permet de contrôler l'obtention de l'égalité de côtés contigus. Cette épreuve d'exploration a permis à Amz de raffiner sa validation de l'égalité des côtés contigus en intégrant dans sa procédure de construction des éléments de contrôle de l'obtention de l'égalité des côtés contigus. Dans cette activité d'exploration, Amz s'oriente autant vers le contrôle de l'acte de construire que vers la validation par le produit. Quant à Alf, son activité de construction s'oriente davantage vers la représentation qu'il a de l'objet à construire que vers une systématisation de l'acte de construire. Ce qui l'intéresse, c'est l'état final de l'étirement, qui lui permet d'ajuster sa prochaine action, et non pas l'étirement en soi, qui, par une transformation, passe d'un état initial à un état final.

D'un autre côté, cette exploration guidée a renforcé, en même temps, la dominance des directions verticale et horizontale dans la caractérisation du rectangle et la validation *a posteriori* de l'obtention du rectangle. Ces directions sont utilisées à la fois comme des caractéristiques du côté d'un rectangle, comme des outils de contrôle de la construction de rectangles et comme des outils de validation du produit de la construction.

L'analyse des résultats de l'épreuve CC

— La conception de l'oblique et la construction de parallélogrammes

Pour construire son premier parallélogramme, Alf commence par fixer la troisième punaise; puis, il fixe la quatrième et obtient ainsi un rectangle. Ensuite, il déplace latéralement la troisième et la quatrième punaises, alternativement et par ajustements continus, tout en gardant la corde tendue, de manière à obtenir deux côtés opposés inclinés et parallèles. Ainsi, il obtient un parallélogramme.

Lorsque l'expérimentateur lui demande de faire d'autres parallélogrammes, Alf détruit le parallélogramme construit et recommence la construction à partir d'une forme quadrilatère quelconque. Sa démarche ne se base pas sur la construction de l'orthogonalité de type «vertical-horizontal»; il utilise plutôt un déplacement presque simultané de deux punaises, la troisième et la quatrième, de manière à obtenir deux côtés opposés inclinés et parallèles.

En somme, Alf n'a pu construire que quatre parallélogrammes (voir figures Alfl, Alf2, Alf3 et Alf4). Alf ne retient, comme obliques, que celles qui diffèrent nettement de la direction verticale ou horizontale. Ceci nous amène à qualifier de synthétique ou plutôt de globaliste sa conception de l'oblique. Pour Alf, il n'y a que deux sortes d'obliques: celle inclinée à droite et celle inclinée à gauche. En outre, il nous révèle que les deux parties du plan séparées par le côté fixe sont, pour lui, comme les deux lieux où on peut produire des parallélogrammes.

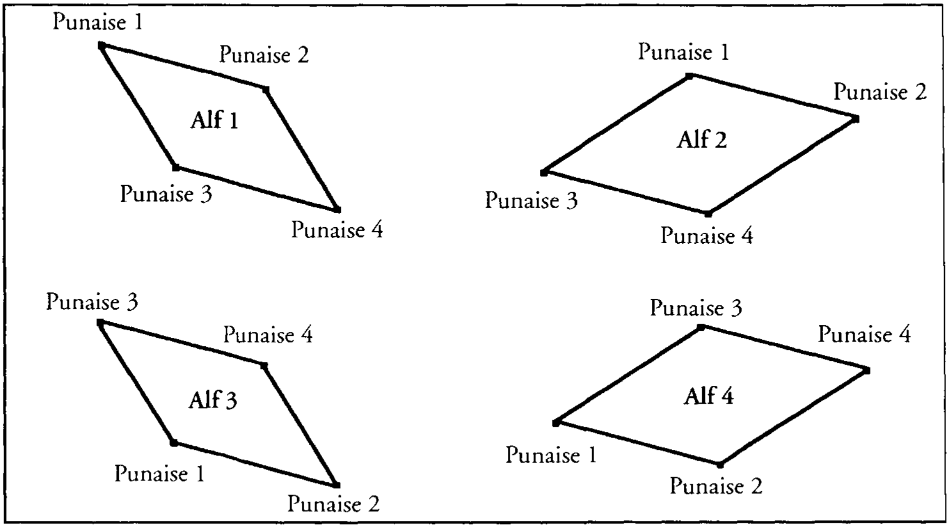

Figure 3 – Premier, deuxième, troisième et quatrième parallélogrammes d'Alf

La direction du côté fixe est déterminante dans la construction de l'oblique; plus cette direction est horizontale plus l'oblique du côté contigu est facile à obtenir. Alf conçoit le parallélogramme comme un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux, parallèles et obliques (absence de l'orthogonalité). Il tient compte de la position spatiale de la figure, par exemple, les figures Alfl et Alf3 représentent deux parallélogrammes différents. Il ne se réfère qu'à la perception pour valider l'obtention du parallélogramme, perception centrée sur l'obtention de la direction oblique d'une paire de côtés opposés et sur le parallélisme de ces obliques.

— L'absence de l'horizontale et construction de parallélogrammes

Amz a de la difficulté à construire plusieurs parallélogrammes parce qu'il y a absence de la direction horizontale (le côté fixe n'est pas horizontal). Sa construction se reporte à une procédure par ajustements successifs de l'égalité des côtés opposés. Il n'a pu construire que deux parallélogrammes: son premier parallélogramme et son opposé (le côté contigu au côté fixe du premier parallélogramme a une direction opposée à celle du côté du deuxième parallélogramme). Il utilise une procédure qui lui permet de construire l'opposé d'un parallélogramme. Il prend le parallélogramme déjà construit et, par un mouvement rectiligne, il déplace, en suivant une direction horizontale, le côté opposé au côté fixe tout en restant parallèle à son côté opposé. Cette procédure ne peut construire que l'opposé du premier parallélogramme. Ce qui caractérise cette procédure, c'est le déplacement rectiligne suivant une direction horizontale, au lieu d'un mouvement de rotation qui conserve le parallélisme tout en conservant le périmètre. Ce déplacement ne peut conserver à la fois le périmètre constant et le parallélisme des côtés opposés.

Le premier parallélogramme **Le deuxième parallélogramme**

Pour construire son deuxième parallélogramme, il a déplacé simultanément les punaises mobiles par un mouvement rectiligne suivant une direction horizontale.

Figure 4 – La construction du deuxième parallélogramme par Amz

Si nous limitons notre analyse uniquement à la production finale des élèves, nous pouvons conclure qu'Alf et Amz utilisent les mêmes caractérisations du parallélogramme et de l'oblique; mais, si nous intégrons à cette analyse les procédures de construction, nous dirons que l'exploration d'Alf est soutenue par une conception synthétique de l'oblique et que celle d'Amz est basée sur le déplacement rectiligne suivant une direction horizontale. Autrement dit, Alf déforme le quadrilatère en utilisant un déplacement par ajustements successifs et vise de la sorte à obtenir le parallélisme de deux côtés opposés et obliques. Par contre, Amz utilise le déplacement rectiligne, suivant une horizontale comme un moyen; ce déplacement permet d'assurer l'obtention du parallélisme des côtés opposés. Pour explorer les parallélogrammes par l'épreuve d'exploration CC, Alf se centre sur une caractérisation du but à atteindre et Amz se reporte au moyen à utiliser pour assurer l'atteinte de l'objectif visé.

— Le déplacement symétrique et la construction de parallélogrammes

Soulignons que, pour Dad, les deux punaises fixes (le côté de base) forment un côté horizontal. Dad commence par construire un rectangle. Pour construire d'autres parallélogrammes à part de ce rectangle, Dad déplace les deux punaises mobiles dans des sens opposés. Ce déplacement maintient le parallélisme des côtés horizontaux et il peut être associé à l'étirement des élastiques dans l'épreuve TE. Dad ne peut d'abord construire qu'une suite de trapèzes symétriques à partir d'un rectangle. Après plusieurs essais, il répond qu'il ne peut construire qu'un seul parallélogramme. Même en essayant de le forcer, par des interventions, à se centrer sur la conservation du parallélisme des côtés opposés, Dad n'arrive pas à se détacher de son déplacement des punaises.

Dad utilise un déplacement qui ressemble à l'étirement des élastiques qu'il a déjà utilisés dans l'épreuve d'exploration. Rappelons que, par l'étirement, on déplace les côtés opposés alors que par le déplacement des punaises en sens opposés, on déplace deux sommets contigus. Dans son activité d'exploration, Dad se reporte à ce déplacement des punaises en sens opposés parce qu'il lui a permis de générer, dans l'épreuve TE, des formes similaires à sa construction de départ. Autrement dit, Dad considère ce déplacement comme étant un «théorème en acte» et essaye de l'utiliser dans l'épreuve CC. Cet élève ne contrôle pas son procédé de construction par la caractérisation du produit à obtenir.

Tableau 3

La construction de parallélogrammes (CC)

CC	La construction de parallélogrammes par l'épreuve CC
Alf	– La construction des parallélogrammes est centrée sur le parallélisme des côtés opposés; – il a une conception synthétique de l'oblique: l'oblique à droite, l'oblique à gauche; – l'obtention de l'oblique dépend de la direction du côté fixe: plus la direction est horizontale plus l'oblique du côté contigu est facile à obtenir; – il n'a pu construire que quatre parallélogrammes.
Amz	– La construction est davantage contrôlée par la procédure de construction que par les caractéristiques du produit à construire; – le parallélogramme est caractérisé par le parallélisme des côtés opposés; – la construction de parallélogrammes est centrée sur le déplacement rectiligne des punaises suivant une direction horizontale; – il n'a pu construire que deux parallélogrammes.
Dad	– La déformation du rectangle (pour construire d'autres parallélogrammes) est centrée sur le déplacement des punaises dans des sens opposés; – il y a dominance du déplacement des sommets dans des sens opposés et symétiques (reproduction de l'étirement); – il n'a pas pu construire qu'un parallélogramme qui est rectangle.

Conclusion

Les aspects figuraux de la figure et le rapport caractérisation-validation

L'oblique et la direction horizontale sont des aspects qui sont d'ordre figural. Elles caractérisent la position du côté d'un quadrilatère dans un plan euclidien. Elles sont des concepts qui ne sont pas mathématiques et qui interviennent en géométrie comme des composantes figurales permettant de caractériser la position relative d'un segment ou d'une droite dans un plan euclidien. L'analyse des résultats de ces deux épreuves nous a permis de constater que ces aspects figuraux interviennent sur le plan de l'exploration, de même qu'à ceux de la construction et de la validation.

Tous ces élèves se sont référés à la présence des directions horizontales et verticales pour s'assurer de l'obtention d'un rectangle. Ces directions assurent l'orthogonalité et l'égalité des côtés opposés. Elles assurent donc la présence des éléments qui caractérisent la forme rectangle.

La direction du côté fixe joue un rôle déterminant dans cette modalité d'exploration. Pour Dad, la direction horizontale du côté fixe est un obstacle à l'exécution de ses tâches de la modalité CC. Pour Alf, cette direction du côté fixe intervient à propos de la détermination de l'oblique et plus cette direction est horizontale, plus l'oblique du côté contigu est facile à obtenir. Pour Amz, la direction intervient surle plan de sa procédure de construction de parallélogrammes. Il utilise le mouvement rectiligne suivant une horizontale qui serait l'élément principal d'une procédure de transformation de parallélogrammes.

L'action et la validation

Balacheff a développé une typologie des preuves produites par les élèves dans un contexte d'exploration. Cette typologie établit principalement des preuves produites par des binômes d'élèves devant le problème suivant: donner un moyen qui permette, dès que l'on connaît le nombre des sommets d'un polygone, de calculer le nombre de ses diagonales. Dans cette typologie, Balacheff distingue deux grandes catégories de preuves: les preuves pragmatiques, liées à l'action, et les preuves intellectuelles qui supposent un détachement de l'action.

Dans notre contexte, la production de preuves se situe dans le cadre de la construction de certains polygones matérialisés. Cette construction des objets ne doit pas se passer de la perception parce qu'elle est fondée sur l'action concrète. Il s'agit d'une action qui est de nature géométrique. Elle est la composante principale de toute construction géométrique. Cette action peut varier d'une pure manipulation d'objets concrets à une construction géométrique (soutenue par un savoir géométrique) d'objets géométriques.

Vue sous l'angle de la validation, l'action utilisée dans le contexte de Balacheff est de nature expérimentale. Elle joue un rôle équivalent à celui que jouent la mesure, le découpage, etc. dans la validation en géométrie. Dans ce cas, la validation est soutenue par l'action et, dans l'action, il s'agit d'une validation expérimentale. En revanche, dans notre contexte, l'action est soutenue par ce que l'élève a comme caractérisation de l'objet à construire. Dans notre cas, la validation est directement liée à la caractérisation des objets; elle se compose d'un contrôle de l'acte de construire et d'une validation du produit de la construction. Les résultats montrent que le fait de se centrer, pendant l'exploration, sur le produit de la construction, conduit à des preuves de type pragmatique, alors que le fait de se centrer sur le contrôle de l'acte de construire favorise la production de preuves de type intellectuel. L'action fait ainsi partie de la validation et peut varier d'une action expérimentale à une action géométrique; ceci dépend de la structure de la caractérisation de l'objet à construire qui la soutient. Plus la caractérisation qu'a l'élève de l'objet à construire est raffinée ou structurée sous forme de propriétés mathématiques, plus sa validation de l'objet construit est systématique et orientée vers une validation mathématique. De même, il est juste de dire que plus sa caractérisation de l'objet à construire est raffinée, plus son acte de construire cet objet s'éloigne du concret qui soutient la construction; il devient ainsi un acte davantage abstrait. Les preuves produites par les élèves, dans ce contexte, peuvent être de nature pragmatique comme elles peuvent être de nature intellectuelle.

Comment peut-on structurer l'exploration pour amener l'élève à raffiner les éléments auxquels il se réfère dans une production de preuves?

La réponse à cette question de recherche, au moyen de notre cadre expérimental, nous impose de préciser notre position relative au rapport reliant le cadre expérimental et la validation.

— Le contrat expérimental et la validation

Avant toute action sur le matériel, il y a des contraintes de construction qui sont présupposées. C'est en fait un contrat entre le matériel, l'élève, l'intervieweur, la situation et le déroulement de la situation. Ce contrat incorpore les intentions de l'intervieweur et la manière de manipuler *a priori* les objets proposés.

La validation sur laquelle l'élève doit s'appuyer dans son argumentation doit s'inscrire dans le cadre du contrat expérimental. Ce dernier est une contrainte qui renforce le caractère relatif et contextuel de la validation. Rappelons que, pour construire un rectangle, Dad a fait appel au caractère plan de la table (il a posé les tiges verticalement sur la table) et a réduit la construction du rectangle à l'obtention de deux tiges verticales Quant à Alf, il a utilisé l'étirement maximal pour rendre les côtés élastiques «rigides» et pour avoir l'égalité de leurs longueurs. Avec cet étirement, il a ramené la construction du rectangle à l'obtention des directions verticale et horizontale des côtés du quadrilatère.

Soulignons que les caractères plan de la table et étirement maximal des élastiques sont des éléments du contexte de l'épreuve que l'expérimentateur n'a pas considérés parmi les outils auxquels les élèves peuvent se reporter pour contrôler et pour valider leurs tâches. De plus, aucune information de la consigne ne disait qu'il ne fallait pas les utiliser comme éléments de contrôle de la construction de rectangles. Peut-on affirmer, de toute façon, que ces éléments ne font pas partie du cadre de validation autorisé pour ces épreuves d'exploration?

À notre avis, le plan de la table et l'étirement maximal des élastiques sont des éléments de contrôle de la construction. Ils devraient faire partie du cadre de validation, sauf qu'ils n'appartiennent pas à une caractérisation quelconque de l'objet à construire. Ils ne sont que des outils qui soutiennent la perception et qui permettent de faciliter l'obtention du parallélisme et des directions verticale et horizontale.

Nous supposons que ce renforcement du caractère relatif et contextuel de la validation peut amener l'élève à se rendre compte de la nécessité de démontrer; nous soutenons qu'un changement de contrat expérimental, par le biais d'un ajout de contraintes, peut amener l'élève à mieux percevoir les enjeux de la démonstration et, ainsi, à se rendre compte de la nécessité de démontrer; mais cet ajout de contraintes doit être centré sur la validation. Son but est de réduire le cadre de validation sur lequel l'élève s'appuie.

Il y a toujours une ressemblance entre les activités de construction que l'expérimentateur exige de l'élève et l'activité de démonstration. Dans ce sens, prendre conscience de la nécessité de s'inscrire dans le contrat expérimental et de n'utiliser que les éléments de validation, permis par le cadre de validation sous-jacent à ce contrat expérimental, est équivalent à reconnaître et à accepter la nécessité de démontrer pour autrui et, par la suite, la nécessité de démontrer pour soi-même ou pour autrui.

— L'exploration et la démonstration en enseignement de l'ordre secondaire

Dans l'exécution de TE, Amz sépare le carré du rectangle. Cette séparation l'oblige à contrôler l'égalité des côtés contigus par une procédure efficace parce qu'il contrôle l'inégalité par une simple perception. Cette épreuve offre à l'élève une possibilité de superposer un côté sur un autre qui lui est contigu. L'introduction du carré, à la suite d'une exploration de rectangles, a permis à l'élève de raffiner ou de systématiser sa perception des côtés contigus. La superposition de deux côtés contigus est un des moyens qui permettent de valider le carré et de définir l'égalité ou la congruence en des termes non numériques.

L'exploration du carré dans TE peut être considérée comme un ajout de contraintes par rapport à l'exploration du rectangle (ajout de l'égalité des côtés contigus). Dans cette exploration du carré, nous avons présenté l'égalité des côtés comme une situation particulière à l'intérieur d'un ensemble discret d'inégalités. L'égalité se présente comme une sorte de cas limite de l'inégalité, même si l'étirement est conçu comme étant discret, parce que le voisinage de la situation de l'égalité est formé de situations d'inégalités.

L'exploration des cas limites et l'exploration par ajout de contraintes permettent de remettre en cause des éléments de validation, telle la perception, et de rendre l'élève conscient de la nécessité de démontrer. En effet, les cas limites et l'ajout de contraintes sèment le doute. Ils permettent d'orienter l'élève vers l'exploration des limites d'un élément de validation et de le mettre dans une situation où il peut se rendre compte de la présence d'une faiblesse dans sa validation afin de la renforcer, de la raffiner ou de la rejeter. Ils ont pu orienter l'élève Amz vers une validation de type «contrôle de l'acte de construire» et ainsi se référer à une caractérisation du carré efficace quant à l'utilisation du matériel de l'épreuve d'exploration en question. Autrement dit, ils ont pu amener l'élève Amz à une validation du produit, à une validation de type «contrôle de l'acte de construire».

Il ne faut pas oublier que l'introduction de l'impossibilité dans un contexte d'exploration, soutenue par une manipulation d'objets, peut amener l'élève à avoir un recul par rapport à ses manipulations. Nous supposons que ce recul résulte de ce que l'on conçoit comme prolongement, à la suite de nos actions, dans les limites d'une certaine liberté à imaginer. Les cas impossibles peuvent surtout amener l'élève à se passer de la méthode expérimentale parce que cette dernière ne peut justifier que le possible.

Abstract – This article presents the results of a study of secondary level students' difficulties in producing geometry demonstrations. This problem is examined within an exploratory frame and is based on an analysis of links between the characterization of mathematical objects and the development of mathematical validation. The experimental treatment proposed illustrates the role of manipulation in representing objects and in developing mathematical validation.

Resumen – Este artículo presenta la síntesis de un estudio de dificultades de alumnos de secundaria en la realización de demostraciones geométricas. Se aborda el problema dentro de un marco de exploración partiendo de un análisis de la relación entre el refinamiento de la caracterización de objetos matemáticos y el desarrollo de una validación matemática. El tratamiento experimental ilustra el papel que juega la manipulación dentro del refinamiento de la caracterización de objetos y dentro del desarrollo de la validación matemática.

Zusammenfassung – Im vorliegenden Artikel wird zusammenfassend eine Studie dargestellt über die Unfähigkeit der Schüler der Mittelschule, geometrische Beweisführungen anzustellen. Dieses Problem wurde innerhalb von Experimentierperioden untersucht, wobei ausgegangen wird von einer Analyse des Verhältnisses zwischen der Verfeinerung der Vorstellung, die der Schüler von mathematischen Objekten hat, und der Entwicklung der mathematischen Bestätigung. Das experimentelle Verfahren, das hier zur Lösung dieses Problems vorgeschlagen wird, bezeugt die Rolle, die die konkrete Handhabung bei der Verfeinerung der Objektvorstellungen und bei der Entwicklung der mathematischen Bestätigung spielt.

Références

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactiques des mathématiques, 19*(3), 281-308.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématique au collège. *Recherche en didactique des mathématiques, 3*(3), 261-304.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège.* Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Braconne, A. (1987). *Compréhension de la démonstration en géométrie chez les professeurs et les élèves au secondaire.* Mémoire de maîtrise, Faculté des sciences de l'éducation, Université Laval, Sainte-Foy.

Brousseau, G. (1979). Processus de mathématisation. *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 282*, 57-70.

Duval, R. et Erget, M. A. (1989). L'organisation déductive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans la démonstration. *In* Annales de didactique et de sciences cognitives (vol. 2, p. 25-40) – Séminaire de didactique des mathématiques de Strasbourg. Strasbourg: IREM de Strasbourg.

Fuys, D., Geddes, D. et Tishler, R. (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, prepared as part of the rechearche project: An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Brooklyn, NY: Brooklyn College.

Janvier, C. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ourahay, M. (1989). *La systématisation de l'utilisation de l'instrument et la structuration de la notion de symétrie.* Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal, Montréal.

Ourahay, M. (1995). *Relation entre l'exploration et la démonstration dans l'activité géométrique.* Thèse de doctorat en éducation, Département des sciences de l'éducation, Université du Québec à Montréal, Montréal.

Tall, D. et Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with a particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(23), 133-170.