

Le développement du système en base 10 chez des élèves de 2ème et de 3ème année primaire, une étude exploratoire
The Development of the Base 10 System for Students in Grades 2 and 3: An Exploratory Study
El desarrollo del sistema de base 10 entre los alumnos de segundo y tercer año de primaria, un estudio exploratorio

Marie Collet

Volume 31, Number 2, Fall 2003

La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/1079595ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/1079595ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Association canadienne d'éducation de langue française

ISSN

0849-1089 (print)

1916-8659 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Collet, M. (2003). Le développement du système en base 10 chez des élèves de 2ème et de 3ème année primaire, une étude exploratoire. *Éducation et francophonie*, 31(2), 218–241. <https://doi.org/10.7202/1079595ar>

Article abstract

Various theoretical models have been used to study the development of the base ten system in fields of study that were at times, very different. This study is the first step in testing one of these theoretical models, the “UDSSI Triad Model” (Fuson et alii (1997); Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)), a model that suggests a linear development of four successive concepts children build while learning the base ten system. In order to characterize the different successive concepts, we defined “translation links” and “structure links”, which take place among the three ways of representing numbers : oral-verbal representation, decimal representation written in numbers and quantitative representation. One hundred-twenty-one Belgian francophone children in grades 2 and 3 were tested individually. The quantitative analyses made on the results partially confirmed our distinction between translation and structure links. In general, they allow us to question developmental order and the different concepts suggested in the model.

Le développement du système en base 10 chez des élèves de 2^{ème} et de 3^{ème} année primaire, une étude exploratoire

Marie COLLET

Unité Psychologie de l'Éducation et du Développement
Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.
marie.collet@psp.ucl.ac.be

RÉSUMÉ

Le développement du système en base dix a été étudié au moyen de divers modèles théoriques dans des champs de recherche parfois très différents. La présente étude constitue la première étape de la mise à l'épreuve de l'un de ces modèles théoriques, le « *UDSSI Triad Model* » (Fuson *et alii*(1997); Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)), modèle qui postule notamment un développement linéaire en quatre conceptions successives que l'enfant construirait au cours de l'apprentissage du système en base dix. Afin de caractériser ces différentes conceptions successives, nous avons défini les *liens de traduction* et les *liens de structure* qui s'établissent entre trois modes de représentation du nombre : la représentation verbale orale, la représentation décimale écrite en chiffres et la représentation quantitative. 121 enfants de 2^{ème} et de 3^{ème} année primaire de l'enseignement belge francophone ont été testés lors d'entretiens individuels. Les analyses quantitatives effectuées sur les résultats confirment en partie notre distinction entre liens de traduction et liens de structure. Plus généralement, ils nous permettent de questionner l'ordre développemental et les différentes conceptions postulés dans le modèle.

ABSTRACT

The Development of the Base 10 System for Students in Grades 2 and 3 : An Exploratory Study

Various theoretical models have been used to study the development of the base ten system in fields of study that were at times, very different. This study is the first step in testing one of these theoretical models, the « *UDSSI Triad Model* » (Fuson *et alii*(1997); Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)), a model that suggests a linear development of four successive concepts children build while learning the base ten system. In order to characterize the different successive concepts, we defined « *translation links* » and « *structure links* », which take place among the three ways of representing numbers : oral-verbal representation, decimal representation written in numbers and quantitative representation. One hundred-twenty-one Belgian francophone children in grades 2 and 3 were tested individually. The quantitative analyses made on the results partially confirmed our distinction between translation and structure links. In general, they allow us to question developmental order and the different concepts suggested in the model.

RESUMEN

El desarrollo del sistema de base 10 entre los alumnos de segundo y tercer año de primaria, un estudio exploratorio

El desarrollo del sistema de base diez ha sido estudiado utilizando diversos modelos teóricos en campos de la investigación muy variados. El presente estudio constituye la primera etapa de la verificación de uno de esos modelos teóricos, el « *UDSSI Triad Model* » (Fuson *et alii* (1997); Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)), modelo que postula un desarrollo lineal en cuatro concepciones sucesivas que el niño construirá a lo largo del aprendizaje del sistema de base 10. Con el fin de caracterizar las diferentes concepciones sucesivas, hemos definido las relaciones de traducción y las relaciones de estructura que se establecen entre los modos de representación del número : la representación oral verbal, la representación decimal escrita en cifras y la representación cuantitativa. 121 niños de segundo y tercer año de primaria del sistema educativo belga francófono fueron evaluados mediante entrevistas individuales. Los análisis cuantitativos efectuados sobre los resultados confirman parcialmente nuestra distinción entre relaciones de traducción y relaciones de estructura. Más aun, dichas relaciones nos permiten cuestionar el desarrollo y las diferentes concepciones postuladas en el modelo.

Cadre général de la recherche

La compréhension des habiletés numériques des jeunes enfants représente un pôle de recherche important depuis plusieurs décennies. Si les modèles théoriques qui tentent d'en décrire le développement sont aujourd'hui nombreux et divers, beaucoup de questions continuent d'être débattues et méritent de nouvelles investigations. Ainsi en est-il de la construction du système en base 10 et plus particulièrement de la manière dont s'établissent les liens entre les différents modes de représentation du nombre.

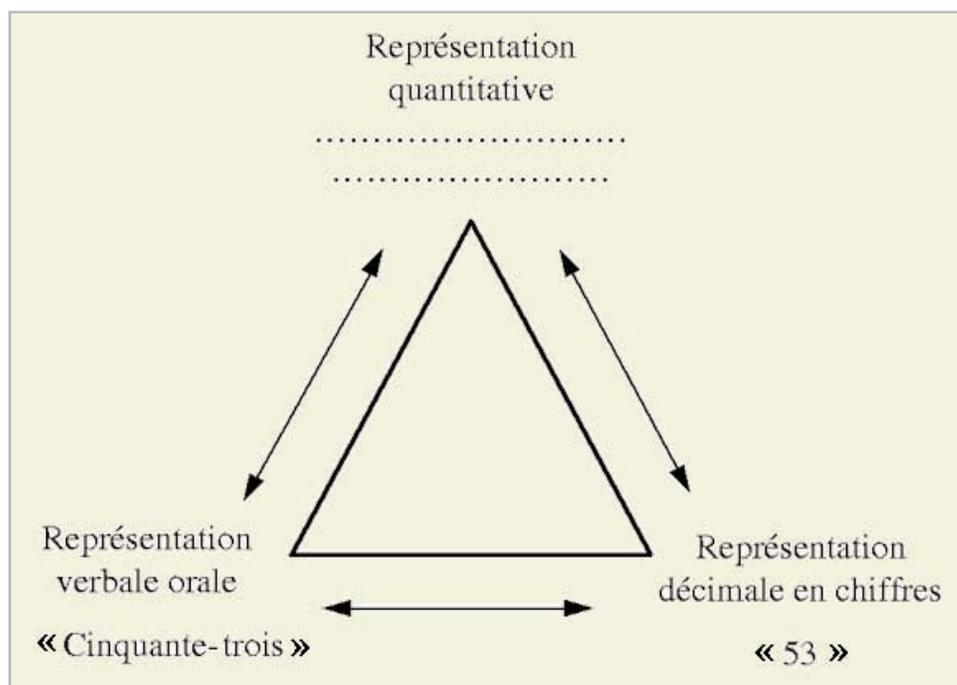
Le système de numération en base 10 est représenté par deux systèmes symboliques (Drucek (1997); Nunes & Bryant (1996); Fuson (1992); Fuson & Briars (1990)) : le système numérique verbal et le système d'écriture décimale des nombres. Ces deux systèmes sont conventionnels et permettent d'exprimer les nombres, de les comprendre (Bednarz & Dufour-Janvier (1986); DeBlois (1996); Nunes & Bryant (1996); Noël (2001)) et de les penser (Nunes & Bryant (1996)) comme des quantités organisées par dix et unitisées selon les puissances de dix.

Cependant, les règles qui régissent la symbolisation des nombres sont différentes pour le système d'écriture décimale en chiffres et pour le système verbal. Le passage d'un mode de représentation à l'autre implique la connaissance de leurs particularités. Tout d'abord, dans le système verbal, la valeur du regroupement par dix est donnée par le terme qui le désigne tandis que dans le système d'écriture décimale en chiffres, elle est donnée par la position du chiffre dans le nombre (valeur positionnelle). Ensuite, le système d'écriture décimale en chiffres est parfaitement régulier, tandis que le système verbal diffère, dans sa régularité et sa structure, en fonction de la langue utilisée. Ainsi, en français, le système de numérotation verbale des nombres jusqu'à cent est irrégulier pour les mots-nombres compris entre onze et seize et pour les noms des dizaines. Dans les langues asiatiques au contraire, le système verbal est tout à fait régulier : seize se dira « dix six » et quarante-neuf « quatre dix neuf ». Une autre particularité du système verbal français est de contenir des mots-nombres dont la structure correspond à la base vingt et non à la base dix : nous disons ainsi quatre-vingt-quatre et non « huitante-quatre » (comme en Suisse francophone) ou « huit dix quatre » (comme le diraient les Chinois s'ils parlaient français). En français de Belgique, langue utilisée par les enfants interrogés dans l'étude que nous présentons, les mots-nombres des dizaines sont irréguliers, comparativement aux systèmes asiatiques, mais seul *quatre-vingt* est un vestige de la base vingt : *vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante, quatre-vingt et nonante*.

Sur la base de recherches antérieures (Resnick (1983); Kamii (1989); Fuson (1992); Miura *et alii* (1993), (1994); Hiebert & Wearne (1992), (1996)), Fuson et ses collaborateurs (Fuson *et alii* (1997); Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)) ont construit un modèle développemental en cinq conceptions que les enfants construiraient successivement en apprenant le système en base 10 jusqu'à 100 (« UDSSI Triad Model »). Les auteurs précisent qu'un même enfant pourrait utiliser des conceptions différentes en

fonction du contexte. L'originalité du modèle est de proposer, pour chaque conception, une description de six liens spécifiques qui s'établiraient entre trois modes de représentation du nombre : la représentation quantitative du nombre, la représentation verbale orale et la représentation décimale en chiffres. Ces six liens sont décrits dans la **Figure 1**, en prenant pour exemple le nombre cinquante-trois.

Figure 1 : **Les six liens entre les trois modes de représentation du nombre, d'après le « UDSSI Triad Model » de Fuson et alii (1997) et Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)**



Dans le modèle, la représentation quantitative du nombre est la représentation quantitative qu'un enfant est capable, à un moment donné de son développement, de dénombrer et de construire. Elle évolue d'une représentation unitaire vers une représentation organisée en groupements de dix. Selon ce modèle, le nombre serait pensé par l'enfant en fonction du type de liens qu'il peut établir entre les trois modes de représentation et en fonction des représentations quantitatives que peut aborder l'enfant : chaque conception décrit une configuration particulière de certains types de liens et d'une représentation quantitative du nombre.

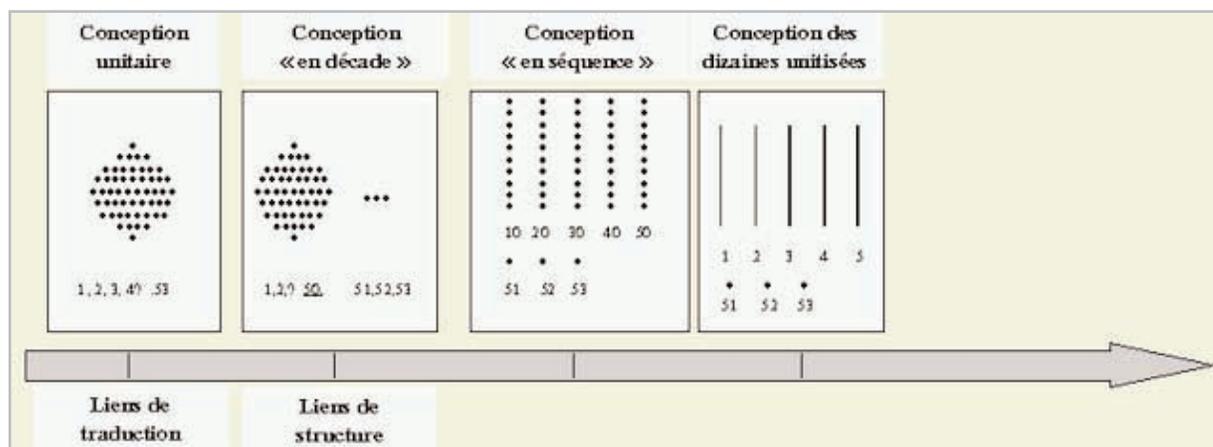
Ces liens entre les modes de représentation du nombre peuvent être de deux types. Nous les décrivons comme suit : il peut s'agir de liens de *traduction* ou de liens de *structure*. Les liens de *traduction* permettent la traduction d'un mode de représentation du nombre en un autre mode de représentation. Par exemple, la représentation verbale orale « cinquante-trois » peut être traduite par la représentation décimale en chiffres « 53 » (relation de traduction entre représentations verbale

orale et décimale en chiffres) ou représentée au moyen de la quantité composée de cinquante-trois unités (relation de traduction entre représentation verbale orale et représentation quantitative du nombre). Les liens de *structure*, quant à eux, permettent de différencier, au sein de chaque mode représentation, la partie représentant les dizaines de la partie représentant les unités et de relier chacune de ces parties à la partie d'un autre mode de représentation qui a la même signification. Par exemple, dans la représentation verbale orale « cinquante-trois », le mot « cinquante » peut être relié à la quantité composée de cinquante unités tandis que le mot trois est relié à la quantité trois unités (relation de structure entre représentation verbale orale et représentation quantitative du nombre). Selon cette distinction, la compréhension de la valeur positionnelle, étudiée par de nombreux auteurs (Fuson, Smith & Lo Cicero (1997); Kamii (1989); Miura *et alii* (1993), (1994); Varelas & Becker (1997); ...), consiste en l'établissement du lien de structure entre la représentation quantitative du nombre et la représentation décimale en chiffres.

Ce modèle a jusqu'ici servi à analyser des productions d'enfants en situation de dénombrement, de transcodage et d'opérations additives et soustractives (Drueck (1997)) et à évaluer des dispositifs d'enseignement (Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)) mais il n'a fait l'objet d'aucune validation empirique. De plus, ce modèle suscite de nombreuses questions théoriques et développementales, dont certaines font l'objet de notre recherche.

Nous nous intéresserons ici aux quatre premières conceptions de ce modèle que nous présentons sous la forme de la **Figure 2** en prenant pour exemple le nombre cinquante-trois. Par exemple, la figure montre que la conception unitaire est caractérisée par une représentation quantitative unitaire de la quantité et par le fait que l'enfant ne peut établir que les liens de traduction entre les trois modes de représentation du nombre.

Figure 2 : **Modélisation des quatre premières conceptions du développement du système en base dix décrites dans le « UDSSI Triad Model » de Fuson et alii (1997) et Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)**



Nous étudions par ailleurs les relations entretenues par ce modèle avec deux autres ensembles de travaux. D'une part, pour Varelas et Becker (1997), la compréhension de la valeur de position implique la coordination de deux composantes. La première, appelée « *multiplicité des valeurs* », est la connaissance du fait que les chiffres prennent des valeurs différentes en fonction de leur position dans le nombre. La seconde, la « *composition de la valeur* », est la connaissance du fait que la valeur totale du nombre est la somme des valeurs respectives représentées par les différents chiffres qui le composent. Ces deux composantes décrivent le lien de structure qui s'établit entre les représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre. D'autre part, Ho et Fuson (1998) étudient la compétence appelée « *compréhension du cardinal emboîté par dix et par dizaines* » qui est la compréhension par l'enfant que la représentation verbale orale d'un nombre situé entre 11 et 99 est composée de la représentation d'une quantité de dizaines et de la représentation d'une quantité d'unités. Cette composante est le lien de structure qui unit la représentation quantitative du nombre à la représentation verbale orale.

L'objectif de nos recherches est d'étudier le développement du système en base dix chez les enfants fréquentant les premières années de l'école primaire. Afin de pouvoir répondre à la question de savoir si ce développement se déroule ou non comme le prédit le modèle de Fuson *et alii* (1997), nous avons choisi de nous centrer sur les aspects développementaux et non sur les aspects relatifs au contexte d'apprentissage (enseignement, didactique, pratiques familiales, etc.). En effet, bien que les auteurs du modèle (Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)) défendent l'idée de chemins développementaux multiples en fonction des variations dans les pratiques scolaires et familiales, le modèle en lui-même décrit un développement linéaire : tous les enfants construiraient les mêmes compétences dans le même ordre. À terme, nous cherchons à savoir si tous les enfants suivent bien un seul et même parcours développemental. Si au contraire, divers chemins de développement peuvent être mis en évidence, alors la question se posera de savoir dans quelle mesure la direction prise par un enfant dans son apprentissage du système en base dix est influencée par des facteurs contextuels tels que les pratiques pédagogiques et didactiques, familiales, etc. Cette première étude exploratoire n'a pas encore pour but d'identifier ces divers chemins développementaux s'il y en a. Ici, nous voulons simplement voir si le développement des différents types de liens au niveau de l'échantillon dans son ensemble correspond à l'ordre postulé par le modèle de Fuson *et alii* (1997).

Notre première question de recherche porte sur l'ordre d'acquisition des liens de traduction et de structure. Notre seconde question de recherche porte sur la séquence développementale qui relie les procédures de dénombrement et la construction des liens entre les trois modes de représentation du nombre.

Hypothèses

Notre première hypothèse est que les six liens qui peuvent s'établir entre représentation quantitative du nombre, représentation verbale orale et représenta-

tion décimale en chiffres suivent un ordre développemental. L'enfant pourrait d'abord établir des *liens de traduction* entre ces trois modes de représentation du nombre, c'est-à-dire effectuer correctement la traduction d'un mode de représentation du nombre en un autre mode de représentation. Il pourrait ensuite construire des *liens de structure* entre ces modes de représentation et pouvoir associer entre elles et en fonction de la structure en base 10 les différentes parties de chaque mode de représentation.

Cette hypothèse se base directement sur la progression développementale de Fuson, Wearne *et alii* (1997) et de Fuson, Smith et Lo Cicero (1997). La première conception, la conception unitaire pour les nombres à plusieurs chiffres, est celle où s'établissent les six liens de traduction entre les trois modes de représentation sans que l'enfant puisse encore comprendre la structure de ces liens. Ensuite, dès la conception « en décade », il est capable non seulement d'effectuer les liens de traduction mais, de plus, d'établir les six liens de structure entre représentation décimale en chiffres, représentation verbale orale et représentation quantitative du nombre. Au niveau de cette conception, seul un type d'erreur de traduction pourrait encore subsister au niveau de la représentation décimale en chiffres : l'erreur de *surécriture* (Noël (2001)) où l'enfant produit un zéro surnuméraire entre le chiffre des dizaines et le chiffre des unités (503 pour le nombre cinquante-trois). Néanmoins, cette erreur de *surécriture* respecte la structure en base dix du nombre ce qui montre que l'enfant comprend qu'une partie de l'écriture est dévolue à la représentation des dizaines tandis que l'autre représente les unités (que ce soit par rapport à une représentation quantitative ou à une représentation verbale orale du nombre). Les liens de traduction qui impliquent l'écriture décimale en chiffres pourraient donc se construire après les autres liens de traduction. En fait, d'après le modèle, tous les liens de traduction pourraient s'observer sans qu'aucun lien de structure ne soit établi (conception unitaire). Inversement, l'établissement des liens de structure nécessite que les liens de traduction soient construits. Étant donné que les liens de traduction impliquant l'écriture décimale en chiffres pourraient se construire après les autres liens de traduction, la construction des liens de structure impliquant cette écriture décimale en chiffres viendrait, elle aussi, après la construction des liens de structure entre représentations verbale orale et quantitative du nombre.

Notre seconde hypothèse est que les liens de traduction et de structure devraient être associés aux *procédures de dénombrement* par dix et des dizaines par un. Par contre, aucune relation ne devrait être observée entre le dénombrement unitaire de la quantité, c'est-à-dire le dénombrement des quantités par un, et les liens de traduction, ni entre dénombrement unitaire et liens de structure.

Cette hypothèse suit également la progression prévue par le modèle de Fuson, Wearne *et alii* (1997) et de Fuson, Smith et Lo Cicero (1997). En effet, le modèle prévoit que c'est en utilisant des procédures de dénombrement unitaire que les liens de traduction et de structure se construisent au niveau des conceptions unitaires et « en décade ». Un enfant qui dénombre « par un » pourrait tout autant établir les liens de traduction et de structure qu'en être encore incapable. Par contre, l'utilisation des procédures de dénombrement par dix et des dizaines « par un » devrait être

le signe que les différents liens de traduction et de structure sont déjà établis car ces procédures relèvent respectivement des conceptions « en séquence » et des dizaines unitisées.

Recherche

L'étude que nous rapportons est une étude exploratoire, quantitative et transversale. Cent vingt et un enfants provenant d'écoles de régions différentes de Belgique francophone ont été testés lors d'entretiens individuels (+/- 40 minutes par enfant), dans une classe disponible de leur école. Ces enfants se répartissent en deux groupes d'âge : 61 enfants fréquentant la deuxième année primaire ($m = 7,5$ ans) et 60 enfants fréquentant la troisième année primaire ($m = 8,5$ ans). En Belgique, la seconde année de l'enseignement primaire est habituellement consacrée à l'étude des nombres de 20 jusqu'à 100 et aux opérations « mentales » sur ces nombres. En troisième primaire, les enfants apprennent les algorithmes écrits de résolution d'addition et de soustraction des nombres à plusieurs chiffres. Les entretiens se sont tous déroulés durant les trois premiers mois de l'année scolaire (octobre-décembre).

Nous avons choisi de reprendre et d'adapter les épreuves utilisées par Fuson, Smith & Lo Cicero (1997) et de Miura *et alii* (1993) pour évaluer l'acquisition et l'expression des conceptions du système en base 10. La « Bean Task » de Varelas et Becker (1997) sert à l'évaluation de l'acquisition de la « multiplicité des valeurs » et de la « composition de la valeur » et l'épreuve de Ho et Fuson (1998) mesure « la compréhension du cardinal organisé par dix et par dizaines ».

Épreuves :

1. Connaissance de la position du chiffre des dizaines et de la position du chiffre des unités (Fuson *et alii* (1997) :

l'adulte montre le nombre 28 écrit en chiffres et demande à l'enfant quel est le chiffre des unités, puis quel est le chiffre des dizaines. Cette tâche n'évalue ni un lien de traduction, ni un lien de structure, elle mesure la connaissance par les enfants des conventions concernant le nom de chaque chiffre en fonction de sa position dans la représentation décimale.

2. Lecture d'un nombre écrit en chiffres et illustration de ce nombre par du matériel (reprise de Miura *et alii* (1993) par Fuson, Smith et Lo Cicero (1997) :

l'adulte présente à l'enfant le matériel en base 10 (réglettes marquées en 10 segments et cubes unitaires). Il lui explique et lui montre qu'une réglette équivaut à 10 blocs de un. Il montre à l'enfant le nombre 28 écrit en chiffres, lui demande de le lire et de le montrer avec le matériel. Idem avec le nombre 42. Ensuite, l'adulte refait la construction de l'enfant pour le nombre 28, lui dit que c'est ce qu'il a fait lorsqu'il lui a montré ce nombre écrit en chiffres et lui demande s'il ne pourrait pas montrer le nombre avec le matériel d'une autre manière. Idem pour 42. L'exactitude des réponses en lecture évalue le lien de *traduction* entre les représentations décimale

en chiffres et verbale orale. L'exactitude des réponses en illustration du nombre par du matériel évalue la relation de *traduction* entre les représentations verbale orale et quantitative du nombre.

3. Dénombrement d'une quantité canonique et écriture décimale en chiffres, (Fuson, Smith et Lo Cicero (1997); adaptée ici avec du matériel en base 10) :

pour chacun des items (34, 17 et 26), l'adulte donne à l'enfant une quantité organisée de manière canonique (par exemple 3 blocs de dix et 4 blocs unités pour 34) avec le matériel en base 10, un papier et un crayon. Il demande à l'enfant s'il peut lui dire combien cela fait et ensuite s'il peut écrire ce nombre. Si l'enfant ne montre pas sa stratégie de dénombrement, l'adulte lui demande de montrer comment il a fait pour dénombrer le matériel. L'exactitude du dénombrement mesure le lien de *traduction* entre la représentation quantitative du nombre et la représentation verbale orale. L'exactitude de l'écriture en chiffres évalue le lien de *traduction* entre la représentation verbale orale et la représentation décimale en chiffres. Chaque type de *procédure* de dénombrement est répertorié (« par un », par 10, des dizaines « par un », ...).

4. Dénombrement d'une quantité non-canonique, écriture décimale en chiffres et compréhension de la valeur de position (reprise de Miura *et alii* (1993)), tâche adaptée avec du matériel en base 10 :

l'adulte donne à l'enfant 3 réglettes de 10 et 12 cubes et il lui demande d'écrire combien cela fait. Si l'enfant écrit le nombre, il lui demande successivement de montrer avec le matériel donné ce que chacun des chiffres signifie dans le nombre. L'exactitude du dénombrement mesure le lien de *traduction* entre la représentation quantitative du nombre et la représentation verbale orale. L'exactitude de l'écriture est une mesure du lien de *traduction* entre représentation verbale orale et représentation décimale en chiffres. Chaque type de *procédure* de dénombrement est répertorié. L'exactitude de l'illustration du chiffre des dizaines est une mesure du lien de *structure* entre la représentation décimale en chiffres et la représentation quantitative.

5. Dénombrement d'une quantité non-canonique, écriture décimale en chiffres et compréhension de la valeur de position pour un nombre à trois chiffres :

l'adulte montre à l'enfant deux plaquettes en bois équivalentes à 10 réglettes et quadrillées de manière à montrer les 100 cubes qu'elles représentent. Il explique à l'enfant ces deux équivalences en comptant avec lui les dix réglettes de la plaquette et les 100 petits cubes. Il donne ensuite à l'enfant une plaquette, 12 réglettes et 2 cubes. Il demande à l'enfant d'écrire combien cela fait et si l'enfant écrit un nombre à trois chiffres, il lui demande de lui montrer avec le matériel ce que signifie le premier chiffre du nombre puis, de lui montrer ce que signifient les deux derniers chiffres du nombre. L'exactitude du dénombrement mesure le lien de *traduction* entre la représentation quantitative du nombre et la représentation verbale orale.

L'exactitude de l'écriture est une mesure de la *traduction* entre représentation verbale orale et représentation décimale en chiffres. Chaque type de *procédure* de dénombrement est répertorié. L'exactitude de l'illustration du chiffre des centaines est une mesure du lien de *structure* entre la représentation décimale en chiffres et la représentation quantitative.

6. Compréhension de la valeur de position : la « Ross task » (Ross (1986), (1989); adaptée ici selon Miura *et alii* (1993)) épreuve avec indice erroné :

L'adulte donne à l'enfant 13 jetons et 3 gobelets, il lui demande de mettre 4 jetons dans chaque gobelet. Il lui demande combien il y a de jetons en tout. Il montre ensuite le nombre 13 écrit en chiffres et demande successivement à l'enfant de montrer ce que chacun des chiffres signifie dans le nombre. Ici, le jeton qui est resté en dehors des gobelets pourrait être associé de manière erronée au chiffre 1 du nombre 13 tandis que les gobelets pourraient être associés au chiffre 3. L'exactitude de l'illustration du chiffre des dizaines est une mesure du lien de *structure* entre la représentation décimale en chiffres et la représentation quantitative.

7. Compréhension du cardinal emboîté par dix (Ho et Fuson (1998)) :

Pour chaque item, l'adulte place en les dénombrant un à un des jetons dans une boîte et demande à l'enfant de « compter tout haut » avec lui pour savoir combien il en met. Il s'arrête, dit à l'enfant qu'il va mettre d'autres jetons dans la boîte et lui demande de « compter tout haut » encore avec lui. Il reprend le dénombrement à partir de un. Il ferme la boîte et dit à l'enfant qu'il a d'abord placé x jetons, puis y jetons. Il lui demande combien il y a de jetons en tout dans la boîte. Il y a 4 items où x est égal à 4 et y égal à 2, 5, 7 ou 9 et 4 items où x est égal à 10 et y égal à 2, 5, 7 ou 9. Pour les items « 10+ », la compréhension du cardinal emboîté par 10 peut être utilisée ce qui n'est pas le cas pour les items « 4+ ». On attribue à l'enfant la compréhension du cardinal emboîté par 10 s'il répond correctement à tous les items « 10+ » en moins de 2 secondes et si ce n'est pas le cas pour les items « 4+ ». Cette tâche et la suivante nous permettent d'investiguer la relation de *structure* entre la représentation quantitative du nombre et sa représentation verbale orale.

8. Compréhension du cardinal emboîté par dizaines :

Pour chacun des 4 items de cette épreuve (20+3, 20+4, 20+7, 20+9), l'adulte dit à l'enfant qu'il place 20 jetons dans la boîte. Ensuite, il lui dit qu'il va mettre d'autres jetons dans la boîte et lui demande de « compter tout haut » avec lui. Il reprend le dénombrement à partir de 1. Il ferme la boîte et dit qu'il y a d'abord placé 20 jetons, puis y jetons. Il lui demande combien de jetons se trouvent dans la boîte. On attribue à l'enfant la compréhension du cardinal emboîté par dizaines s'il répond correctement à tous les items « 20+ » en moins de 2 secondes.

9. Compréhension de la multiplicité des valeurs et de la composition de la valeur :
la « Bean Task » (adaptée de Varelas & Becker (1997))

L'adulte montre le nombre 12 écrit en chiffres et une tasse vide et demande à l'enfant de le lire. Il lui dit ensuite qu'il lui donne 12 jetons et il place les jetons dans la tasse vide : « *maintenant, souviens-toi que tous les jetons ensemble font juste ce nombre. Le nombre dit 12 et il y a 12 jetons* ». « Le nombre a deux parties... », l'expérimentateur les montre du doigt. Il place une tasse vide près de la carte du côté du chiffre des unités et demande à l'enfant, tout en pointant ce chiffre, de mettre « dans la tasse vide les jetons qu'il faut pour montrer cette partie du nombre ». Il lui demande combien de jetons il a mis dans la tasse. Ensuite, il place une autre tasse vide près de la carte mais du côté du chiffre des dizaines et demande à l'enfant, tout en pointant ce chiffre, de mettre « dans la tasse vide les jetons qu'il faut pour montrer cette partie du nombre ». Il lui demande combien de jetons il a mis dans la tasse. Deux contre-suggestions peuvent être données à l'enfant qui a répondu correctement en fonction de ses stratégies de réponses afin de voir si l'enfant peut donner ou non les arguments impliquant la multiplicité des valeurs et la composition de la valeur : 1) « Un autre enfant a fait ceci (l'expérimentateur place un jeton dans la tasse des dizaines). Est-ce que c'est une bonne façon de faire? Pourquoi? ». 2) « Un autre enfant a fait ceci : il a pris le reste des jetons d'un coup sans les compter (l'expérimentateur le fait). Est-ce que c'est une bonne façon de faire? Pourquoi? ». Un indice est donné à l'enfant qui répond erronément à la question de l'illustration du chiffre des dizaines : « Lis le nombre sur la carte ». En soulevant les deux tasses avec les jetons : « Combien y a-t-il de jetons en tout dans les deux tasses? Est-ce que c'est normal? ». La *multiplicité* des valeurs est attribuée si l'enfant donne une réponse correcte pour le chiffre des dizaines (la moitié des points s'il se corrige après l'indice). La *composition* de la valeur est attribuée si l'enfant donne une réponse correcte pour le chiffre des dizaines (et la moitié des points s'il se corrige après l'indice) et qu'il a pris les dix jetons restant sans les dénombrer ou a donné un argument montrant qu'il comprend que la somme des représentations quantitatives de chaque chiffre correspond à la quantité totale de départ. Par exemple, il répond à la première contre-suggestion qu'il n'est pas correct de prendre un jeton pour montrer le chiffre 1 car alors cela fait trois en tout (le contenu des tasses) et non douze. Ou encore, il répond à la seconde contre-suggestion que c'est correct de prendre les jetons qui restent sans les compter car il reste dix jetons puisqu'on en avait douze au départ. Ces deux mesures sont des mesures des composantes de la compréhension de la valeur de position (lien de *structure*).

10. Conceptualisation des groupes de dix dans un nombre à deux chiffres : la « Team Task » (Hiebert & Wearne (1992))

« Dans une école que je connais, il y a 53 élèves en deuxième année (l'adulte montre le nombre 53 écrit en chiffres). J'aimerais faire des équipes

de 10 enfants. Combien d'équipes je peux faire? Pourquoi? ». L'exactitude de la réponse mesure la compréhension en terme de dizaines unitisées du premier chiffre d'une représentation décimale écrite à deux chiffres¹.

11. Évaluer les stratégies spontanées d'addition et de soustraction de nombres avec regroupements avant enseignement de l'algorithme écrit (Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)) :

« Je vais te lire des petits problèmes. J'aimerais que tu me donnes la réponse. Tu peux utiliser comme tu veux le matériel à ta disposition. Tu peux me demander de répéter si tu n'as pas retenu la question. 1) Nicolas a 27 francs dans son porte-monnaie. Puis, il met encore 36 francs dans son porte-monnaie. Maintenant, combien a-t-il de francs dans son porte-monnaie? » « 2) Il y a 74 enfants dans l'autobus de l'école. 38 enfants descendent de l'autobus. Combien d'enfants restent dans l'autobus? » Si l'enfant reste bloqué par ces grands chiffres, l'adulte lui demande d'essayer quand même. L'exactitude des réponses mesure la capacité des enfants à effectuer des échanges entre les groupements (que ces échanges soient effectués mentalement ou sur les quantités) dans la résolution de problèmes verbaux d'addition et de soustraction.

Résultats

Les items se regroupent-ils selon la distinction liens de traduction/liens de structure?

Pour répondre à cette question, nous avons réalisé une analyse factorielle exploratoire² sur l'ensemble des mesures (excepté les procédures de dénombrement). Ont été exclus de cette analyse, les items dont la saturation factorielle la plus importante était inférieure à 0,4 et/ou n'ayant pas des saturations factorielles assez différentes (>0,2). Trois facteurs importants émergent. À eux trois, ils expliquent 55,1 % de la variance totale du test. Le premier facteur, que nous avons appelé « *compréhension des liens entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre* », explique 30,1 % de la variance des résultats et regroupe les épreuves évaluant la multiplicité des valeurs, la composition de la valeur, les différents items évaluant la compréhension de la valeur de position, le dénombrement de grandes quantités (au-delà de 100), la conceptualisation des groupes de dix d'un nombre à deux chiffres, l'écriture de nombres à trois chiffres, l'addition et la soustraction avec échanges lors de problèmes verbaux. Il implique donc la compréhension de la valeur de position, c'est-à-dire l'établissement du lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre, mais aussi le dénombrement et l'écriture d'un nombre à trois chiffres, la conceptualisation des

-
1. Elle n'est pas une évaluation de la relation de structure entre représentation décimale écrite et représentation verbale orale. Cette tâche ne peut être résolue qu'au niveau de la conception des dizaines unitisées du modèle de Fuson *et alii* (1997)
 2. Analyse en composant principal avec méthode de rotation varimax.

groupes de dix dans un nombre à deux chiffres et les opérations. Le second facteur, appelé « *traductions* », regroupe les épreuves évaluant le dénombrement de quantités qui impliquent des nombres à deux chiffres, l'écriture et l'illustration de nombres à deux chiffres. Il comprend donc les deux liens de traductions qui s'établissent entre les représentations quantitative du nombre et verbale orale et le lien de traduction qui unit la représentation verbale orale à la représentation décimale en chiffres (aucun item du test ne permet d'évaluer directement les liens de traduction entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre). Ce facteur permet d'expliquer 15,7 % de la variance des résultats. Le troisième facteur retenu, appelé « *conventions* », se compose des épreuves évaluant la lecture des nombres à deux chiffres, la connaissance de la position du chiffre des unités et du chiffre des dizaines et la compréhension du cardinal emboîté par dix et par dizaines. Ce facteur regroupe ainsi le lien de traduction entre représentations décimale en chiffres et verbale orale, la connaissance du nom des positions et le lien de structure entre représentations quantitative du nombre et verbale orale. Il n'explique que 9,3 % de la variance des résultats.

Y a-t-il une progression développementale entre ces facteurs?

Pour répondre à cette question, nous avons calculé les résultats factoriels obtenus par chaque enfant (un score par facteur pour chaque enfant) et nous avons réalisé une analyse de variance ANOVA sur ces résultats. De cette analyse, il apparaît que les résultats obtenus aux facteurs «traductions» et «conventions» sont proches et qu'ils diffèrent de manière significative ($F < 0,00001$) des résultats obtenus au facteur « compréhension des liens entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre » : les items des facteurs « *traductions* » et « *conventions* » sont significativement mieux réussis que les items du facteur « *compréhension des liens entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre* ». De cette analyse, on peut supposer un ordre développemental entre les trois facteurs : les compétences sous-jacentes aux facteurs « *traductions* » et « *conventions* » semblent se construire avant les compétences attachées au facteur « *compréhension des liens entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre* ».

Quelles sont les associations entre ces facteurs et les procédures de dénombrement unitaire, par dix et des dizaines « par un »?

Afin de voir s'il existe une relation entre les trois facteurs dégagés lors de l'analyse factorielle et les procédures de dénombrement unitaire, par dix et des dizaines « par un », nous avons calculé les corrélations entre les résultats factoriels et l'utilisation des procédures de dénombrement par les enfants pour résoudre les épreuves impliquant le dénombrement d'une quantité (nombre d'utilisation de la procédure/nombre de situations).

Les corrélations entre l'utilisation d'une procédure de dénombrement unitaire et les résultats factoriels aux trois facteurs sont toutes négatives et significatives (-.373 à $P < 0,0001$; -.195 à $P < 0,05$; -.389 à $P < 0,0001$). Cela signifie que plus un enfant

utilise la procédure de dénombrement unitaire, plus il obtient des résultats faibles à chacun des trois facteurs. L'utilisation d'une procédure de dénombrement par 10 est corrélée positivement avec le facteur « traductions » (.252 à $P < 0,005$), négativement avec le facteur « compréhension des liens entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre » et n'est pas corrélée avec le facteur « conventions ». Enfin, l'utilisation d'une procédure de dénombrement des dizaines par 1 est corrélée positivement de manière significative avec les trois facteurs : corrélation de .683 ($P < 0,0001$) pour le facteur « compréhension des liens entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre », de .288 ($P < 0,001$) pour le facteur « traductions » et de .368 ($P < 0,0001$) pour le facteur « conventions ».

Discussion

Les regroupements des items correspondent-ils à la distinction entre liens de traduction et liens de structure? Les liens de traduction sont-ils établis avant les liens de structure?

L'analyse factorielle exploratoire va dans le sens attendu de notre hypothèse d'un regroupement en fonction de la nature des liens évalués : les liens de traduction se regroupent entre eux et se distinguent du lien de structure entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre. De plus, l'analyse de variance ANOVA nous a permis d'établir un ordre développemental entre les compétences évaluées, les liens de traduction étant significativement mieux réussis que les items du facteur « compréhension des liens entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre », auquel appartiennent les items de structure entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre. Les liens de traduction semblent donc bien être construits avant les liens de structure, comme le modèle de Fuson *et alii* (1997) le prévoit.

Cependant, les regroupements observés ne sont pas toujours conformes aux regroupements attendus. Premièrement, parmi les liens de traduction, le lien entre les représentations décimale en chiffres et verbale orale (la lecture d'un nombre en chiffres) est attaché au facteur « conventions » et pas au facteur « traductions ». La lecture d'un nombre en chiffres aurait donc des caractéristiques différentes de l'écriture du nombre en chiffres (lien de traduction entre représentations verbale orale et décimale en chiffres), du dénombrement d'une quantité (lien de traduction entre représentations quantitative du nombre et verbale orale) et de l'illustration d'un nombre (lien de traduction entre représentations verbale orale et quantitative du nombre). Le modèle de Fuson *et alii* (1997) précise que l'écriture du nombre en chiffres (lien de traduction entre représentations verbale orale et décimale en chiffres) et lien de traduction entre représentations quantitative du nombre et décimale en chiffres) peut s'acquérir après la construction des autres liens de traduction, au niveau de la conception « en décade ». Cependant, le modèle ne permet pas d'expliquer pourquoi l'écriture s'attacherait davantage que la lecture aux liens de traduction entre représentations quantitative du nombre et verbale orale, le contraire étant

plutôt attendu. Les résultats de l'analyse ANOVA ne nous permettent pas de confirmer l'ordre d'acquisition des liens de traduction prévu par le modèle puisque les différences entre les résultats factoriels aux facteurs « *conventions* » et au facteur « *traductions* » ne sont pas significatives. Les résultats des recherches en neuropsychologie développementale sur le transcodage ne montrent pas de différence de performance entre écriture et lecture d'un nombre en chiffres chez des enfants de 7 ans (Noël (2001)). Ces résultats confirment l'absence de différence significative observée chez nos sujets entre les performances aux facteurs « *conventions* » et « *traduction* ». Cependant, l'absence de cette différence développementale pourrait s'expliquer par l'âge des sujets évalués dans notre étude (7,5 ans et 8,5 ans) : tous les items de traduction sont déjà réussis par une grande majorité d'enfants. De nouvelles études, sur des enfants plus jeunes, sont nécessaires pour pouvoir décrire l'ordre d'acquisition des liens de traduction et les relations qu'ils entretiennent en eux.

Deuxièmement, alors que nous attendions que tous les liens de structure se regroupent au sein d'un même facteur, le lien de structure entre la représentation quantitative du nombre et la représentation verbale orale (évalué par l'épreuve de compréhension du cardinal emboîté par dix et par dizaines) est attaché au facteur « *conventions* » et non aux items évaluant la relation de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre. De plus, l'analyse ANOVA a permis d'établir une différence significative dans les résultats obtenus aux items à ces deux facteurs. D'après le modèle de Fuson, Wearne *et alii* (1997) et Fuson, Smith et Lo Cicero (1997), les six liens de structure s'établissent au niveau de la conception « en décade ». Lors de la construction de cette conception, les premiers liens de structure sont ceux qui relient les représentations verbale orale et quantitative du nombre car, au début, les liens de structure avec la représentation décimale en chiffres peuvent s'établir sur des erreurs de traduction (« 503 » pour « 53 » avec le « 50 » relié au mot-nombre cinquante et à la quantité cinquante). Ce n'est que lors de la seconde étape de construction de cette conception que les liens de structure avec la représentation décimale en chiffres correcte se développeraient. L'analyse des corrélations entre les items montre que des corrélations peu élevées (entre .25 et .35) mais significatives (à .005 et .0001) associent le lien de structure entre représentations quantitative du nombre et verbale orale au lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre. Cependant, les deux liens se distinguent l'un de l'autre, le premier étant bien mieux réussi que le second et appartenant à un facteur distinct. Ces résultats montrent que le lien de structure entre représentations quantitative du nombre et verbale orale est antérieur au lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre, ce qui est effectivement prévu dans le modèle. Cependant, la différence significative si importante relevée par l'analyse de variance ANOVA pose la question de savoir si vraiment, ces deux liens de structure se construisent au même niveau conceptuel et s'ils n'appartiennent pas plutôt à des moments développementaux différents. La réponse à cette question nécessiterait cependant l'évaluation non seulement des deux liens de structure mesurés ici mais aussi des quatre autres liens de structure possibles entre les trois modes de représentation du nombre. Ainsi, nous pourrions

compléter l'étude du modèle de Fuson, Wearne *et alii* (1997) et Fuson, Smith et Lo Cicero (1997) et analyser plus finement l'ordre développemental d'acquisition de ces liens.

Au-delà de notre hypothèse, l'analyse factorielle a regroupé les liens de structure et de traduction avec d'autres compétences. Ainsi, au sein du facteur « *compréhension des liens entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre* », l'association des liens de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre avec l'addition et la soustraction avec échanges et avec le dénombrement et l'écriture de grands nombres indique clairement que ces compétences sont liées à une compréhension de l'écriture des nombres. Ce résultat est similaire à ceux obtenus par Hiebert et Wearne (1996), (1992) et par Ho et Cheng (1997)³. Il semble confirmer l'importance donnée par Fuson *et alii* (1997) à l'addition et la soustraction de nombres à plusieurs chiffres comme supports de la poursuite de la construction de la valeur positionnelle.

Le troisième facteur, « *conventions* », n'était pas attendu *a priori*. Il regroupe la lecture des nombres (traduction entre représentations décimale en chiffres et verbale orale), la connaissance de la position du chiffre des unités et des dizaines dans un nombre et la compréhension du cardinal emboîté par dix et par dizaines. Une analyse plus fine des résultats montre que la lecture d'un nombre écrit en chiffres est une compétence nécessaire mais non suffisante à la compréhension du cardinal emboîté par 10 (lien de structure entre représentations quantitative du nombre et verbale orale). L'apprentissage de la lecture des nombres en chiffres aurait ainsi une influence sur la manière dont l'enfant établit le lien de structure entre représentations quantitative du nombre et verbale orale. D'autre part, la connaissance du nom des positions est classiquement considérée comme un élément de la maîtrise des concepts de valeur de position, qu'elle soit évaluée par une épreuve où l'enfant doit montrer le chiffre des dizaines et le chiffre des unités sur le nombre écrit puis sur du matériel (Miura *et alii* (1993), (1994)) ou par une épreuve où il doit dire le nombre de dizaines qu'un nombre écrit comprend ainsi que le nombre d'unités (Fuson *et alii* (1997)). Les items rassemblés ici par l'analyse factorielle sont « montrer le chiffre des unités » et « montrer le chiffre des dizaines ». Par rapport aux épreuves classiques, on perd la partie illustration du chiffre des dizaines et du chiffre des unités. Dès lors, on peut comprendre pourquoi ces items ne sont pas associés au facteur « *compréhension des liens entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre* ».

**Les procédures de dénombrement par dix et des dizaines par
un sont-elles associées aux liens de traductions et de structure?
Observe-t-on une association nulle entre la procédure de
dénombrement unitaire et les liens de traduction et de structure?**

Au niveau de notre seconde hypothèse, parmi les relations attendues entre les procédures de dénombrement et les liens de traduction et de structure, la procédure de dénombrement des dizaines « par un » est liée fortement avec le facteur

3. Ho et Cheng font cette observation sur des opérations écrites verticalement.

« *compréhension des liens entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre* » et corrélée positivement avec le facteur « *traductions* »; la procédure de dénombrement par 10 est corrélée positivement avec le facteur « *traductions* ». Contrairement à notre hypothèse, la procédure de dénombrement par 10 est corrélée négativement avec le facteur « *compréhension des liens entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre* » et les deux facteurs sont liés négativement avec les procédures de dénombrement « par un ». Le troisième facteur, « *conventions* », est corrélé négativement avec les procédures de dénombrement par un et positivement avec les procédures de dénombrement des dizaines par un.

Même si nous n'observons donc pas l'entière des relations attendues, ces corrélations indiquent que plus les procédures de dénombrement utilisées relèvent d'une conception élaborée, meilleurs sont les résultats aux épreuves d'évaluation du système en base 10 : l'utilisation d'une procédure unitaire est liée avec une incapacité à établir les liens de traduction et de structure (corrélations négatives), l'utilisation d'une procédure de dénombrement par 10 est signe de la construction des liens de traductions, et, enfin, l'utilisation d'une procédure de dénombrement des dizaines « par un » est très fortement liée à la « *compréhension des liens entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre* » (compréhension de la valeur de position, opérations avec échanges, dénombrement et écriture de grands nombre, et conceptualisation des groupes de 10 dans un nombre), est corrélée positivement avec les « *traductions* » ainsi qu'avec les « *conventions* » (lecture d'un nombre, compréhension du cardinal emboîté par dix et par dizaines et connaissance du nom des positions). Ces résultats nous amènent à revenir au modèle de Fuson *et alii* (1997) et à remettre en question certaines conceptions.

Relations observées entre les procédures de dénombrement et la compréhension de la valeur de position (lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre)

Selon le modèle, l'enfant peut comprendre la valeur de chacun des chiffres d'un nombre écrit alors qu'il ne peut encore utiliser qu'un dénombrement unitaire des quantités. En effet, même si au début de la construction de la conception « en décade » l'enfant peut n'avoir pas encore compris que le chiffre 5 du nombre 53 signifie cinquante (ce qui explique l'erreur d'écriture 503 pour cinquante-trois), dans la seconde étape de construction de cette conception, il devient capable d'établir les liens de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre (Fuson, Smith & Lo Cicero (1997)). Or, la procédure de dénombrement de cette conception est toujours le dénombrement unitaire (avec séparation physique ou orale entre le groupe des dizaines et les unités). Nous nous attendions donc à ce que des enfants qui dénombrent « par un » puissent aussi bien comprendre la valeur de chaque chiffre d'un nombre à deux chiffres qu'en être encore incapable et notre hypothèse était que les liens de structure ne seraient pas corrélés avec la procédure de dénombrement par un. Ce n'est pas ce qui apparaît puisque la procédure de dénombrement unitaire est corrélée négativement avec le facteur « *compréhension du lien entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du*

nombre ». Cependant, étant donné que ce facteur comprend également le dénombrement, l'écriture de grands nombres et des opérations d'addition et de soustraction, on pourrait penser à juste titre que la réussite au facteur implique des compétences en dénombrement plus évoluées que celles requises *a priori* par le modèle pour le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre. Nous avons donc calculé les corrélations entre les résultats aux différents items qui impliquent le lien entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre avec les différentes procédures de dénombrement. De ces nouvelles analyses, il apparaît que les 6 items évaluant le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre sont tous corrélés négativement (entre -0,211 et -0,334) et de manière significative avec la procédure de dénombrement « par un » : plus un enfant utilise le dénombrement unitaire, moins il a de chance d'établir le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre. On peut donc se demander si effectivement, des enfants qui utilisent la conception « en décade » et qui dénombrent « par un » peuvent déjà comprendre le lien entre représentations quantitative du nombre et décimale en chiffres.

Les résultats sont étonnants aussi en ce qui concerne la conception « en séquence ». Ici, l'enfant qui dénombre par 10 des quantités organisées est sensé avoir acquis le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre. Or, nous avons obtenu une corrélation négative entre dénombrement par 10 et le facteur « *compréhension du lien entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre* » : les enfants qui dénombrent par 10 ont tendance à ne pas réussir les items qui impliquent le lien de structure entre les représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre. Afin de vérifier ici aussi que cette corrélation négative n'est pas due aux autres compétences évaluées par le facteur, il convient d'analyser les corrélations obtenues entre les différents items évaluant le lien entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre et la procédure de dénombrement par 10. Toutes sont négatives effectivement mais seulement trois d'entre elles sont significatives. S'il y a un lien entre la procédure de dénombrement par 10 et le lien de structure entre les représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre, il est négatif mais peu important. L'enfant qui dénombre par 10 n'a donc pas encore tendance à établir le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre contrairement à ce que le modèle de Fuson *et alii* prévoit. En fait, les corrélations négatives faibles et/ou non significatives montrent que l'enfant qui dénombre par dix a un peu plus de chances de ne pouvoir établir le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative que de pouvoir établir ce lien.

Par contre, au niveau de la conception des dizaines unitisées (et de la procédure de dénombrement des dizaines par un), nous avons effectivement une corrélation positive élevée avec le facteur « *compréhension du lien entre représentation décimale en chiffres et représentation quantitative du nombre* ». Ici aussi, nous vérifions dans quelle mesure cette corrélation est due ou non aux autres compétences du facteur et nous nous attardons sur les corrélations entre le dénombrement des dizaines « par

un » et le liens de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre. Celles-ci sont toutes positives et significatives mais moins élevées (entre 0,342 et 0,449). Effectivement, l'enfant qui dénombre les dizaines « par un » et utilise ainsi la conception des dizaines unitisées a tendance à pouvoir établir le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre.

Ces résultats au niveau de la relation entre les diverses procédures et le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative du nombre remettent en question les conceptions « en décade » et « en séquence » telles qu'elles sont décrites actuellement : ce lien a tendance à ne pas s'établir lorsque l'enfant dénombre « par un » et peut ne pas être établi alors que l'enfant dénombre par 10. Les rapports décrits dans le modèle de Fuson *et alii* (1997) entre procédure de dénombrement et lien de structure entre représentation quantitative du nombre et représentation décimale en chiffres doivent être questionnés. Ces résultats semblent montrer en effet que les difficultés des enfants peuvent se rencontrer au niveau de la représentation décimale en chiffres sans se situer au niveau des procédures de dénombrement et de regroupement des quantités (Varelas & Becker (1998)). D'une manière plus générale, ils appellent à un réexamen des associations de tous les liens de structure entre chacun des modes de représentation du nombre afin de vérifier que ces associations correspondent à celles prévues par le modèle de Fuson *et alii* (1997) pour chaque conception.

Relations entre les procédures de dénombrement et la compréhension du cardinal emboîté par dix et par dizaines (lien de structure entre les représentations quantitative du nombre et verbale orale)

L'épreuve de compréhension du cardinal emboîté par dix et par dizaines fait partie du facteur « *conventions* ». Nous avons voulu savoir également comment se comporte ce lien avec les différentes procédures de dénombrement. Notre hypothèse prévoyait ici aussi une association avec les procédures de dénombrement par dix et des dizaines par un et aucune association avec les procédures de dénombrement unitaires. Au niveau du facteur, les corrélations sont négatives avec la procédure de dénombrement par un, nulle avec la procédure de dénombrement par dix et positive avec la procédure de dénombrement des dizaines par un. Au niveau particulier des items qui évaluent ce lien, les corrélations sont quelque peu différentes : les corrélations sont négatives également avec la procédure de dénombrement unitaire (-0,397 et -0,4232 à $p < 0,0001$), nulle avec la procédure de dénombrement par dix et positives avec la procédure de dénombrement des dizaines « par un » (0,225 et 0,350 à $p < 0,05$ et 0,0001) mais nous avons une corrélation positive entre la compréhension du cardinal emboîté par dix et la procédure de dénombrement par dix (0,1795 à $p < 0,05$). Au niveau du dénombrement par un, l'association négative avec le lien de structure entre représentations quantitative du nombre et verbale orale va à l'encontre de notre hypothèse et remet plus encore que précédemment en question la conception « en décade », où l'enfant dénombre « par un » mais est sensé avoir acquis le lien. Les enfants qui utilisent un dénombrement unitaire peuvent-ils vraiment établir le lien de structure entre représentations quantitative du nombre et

verbale orale? Au niveau du dénombrement par dix, la corrélation positive avec la compréhension du cardinal emboîté par dix et nulle avec la compréhension du cardinal emboîté par dizaines indique que les enfants qui dénombrent par dix commencent à comprendre le lien entre représentations quantitative du nombre et verbale orale mais pas pour les nombres au-delà de 20. Ainsi, l'apprentissage du dénombrement par dix correspondrait au moment de la construction du lien de structure entre représentations quantitative du nombre et verbale orale. La conception « en séquence » doit donc, elle aussi être remise en question.

Relations entre les procédures de dénombrement et les liens de traduction

Les corrélations obtenues entre le facteur « *traduction* » et les procédures de dénombrement sont négatives pour la procédure unitaire, positives pour la procédure de dénombrement par dix et des dizaines « par un ». Ici, seule la corrélation négative entre procédure unitaire et les liens de traduction n'était pas attendue. Nous attendions une corrélation nulle. Ce résultat pose la question de savoir si, comme le modèle de Fuson *et alii* (1997) le prévoit, parmi les enfants qui ne peuvent utiliser qu'un dénombrement unitaire, certains, en utilisant la conception unitaire ou la conception « en décade », seraient déjà capables d'établir les liens de traduction. Pour poursuivre de ce côté nos investigations, il faudrait évaluer séparément chacun des six liens de traduction entre représentations quantitative du nombre, verbale orale et décimale en chiffres et analyser quelles relations ils entretiennent avec les différentes procédures de dénombrement, procédures où serait distinguée la procédure unitaire de la procédure « en décade » (ce que nos données ne permettent pas de faire actuellement). C'est ici que les recherches sur le transcodage en neuropsychologie développementale doivent intervenir (Noël (2001); Seron & Fayol (1994), Seron, Noël & Van der Elst (1997)) car elles fournissent des outils pour évaluer particulièrement chacun des six liens de traduction. L'enjeu est de savoir si les relations entre les deux systèmes conventionnels de représentations du nombre (décimales en chiffres et verbales orales) influencent ou non la capacité de l'enfant à utiliser (construire ou dénombrer) une représentation quantitative du nombre en base dix, et *in fine*, la conceptualisation du nombre chez l'enfant.

Conclusion

Cette étude exploratoire et nos hypothèses de départ nous ont permis de questionner le modèle de Fuson *et alii* (1997a), (1997b) à plusieurs niveaux et de définir les investigations nécessaires à la mise à l'épreuve empirique de ce modèle.

Une première série de questions naissent de la distinction entre les liens de traduction et les liens de structure entre les différents modes de représentation du nombre. Cette distinction est partiellement confirmée par nos résultats. Néanmoins, un examen simultané des liens de traduction et liens de structure nous permettra d'éclaircir les relations qu'ils entretiennent et d'apporter de nouveaux éléments quant à l'ordre de leur acquisition. De plus, il permettra l'investigation de la question

relative à l'influence des systèmes de représentations conventionnels sur la conceptualisation du nombre chez l'enfant.

Une seconde série de questions portent sur la séquence développementale qui relie les procédures de dénombrement et la construction des relations entre les trois modes de représentation du nombre. Nos résultats semblent montrer que les enfants peuvent rencontrer des difficultés au niveau de la représentation décimale en chiffres (compréhension de la valeur de position) tout en maîtrisant les procédures de dénombrement et de regroupement des quantités par dix (Varelas & Becker (1998)). Cette observation contredit l'hypothèse d'une construction des relations de traduction et de structure antérieure à la capacité à utiliser les regroupements par dix et par dizaines dans le dénombrement. Tous les liens de traduction et le lien de structure entre représentation quantitative du nombre et système verbal oral se construiraient en même temps que le dénombrement par dix. La relation de structure entre système décimal en chiffres et représentation quantitative du nombre (valeur positionnelle) se construirait en même temps que le dénombrement des dizaines « par un ».

Les limites de cette étude sont liées à son caractère exploratoire.

Premièrement, si l'étude permet de confirmer en partie la distinction entre liens de traductions et de structure, ceux-ci doivent encore être précisés au niveau conceptuel et au niveau de leur évaluation empirique. Pour les liens de traduction, la question est de savoir à partir de quand on peut créditer l'enfant de la capacité à établir une traduction entre deux modes de représentations : par exemple, doit-on vraiment considérer les erreurs de dénombrement (oubli d'un cube ou surcomptage) comme le signe de l'incapacité de l'enfant à pouvoir établir un lien impliquant la représentation quantitative du nombre? Ici, nous avons pris ces erreurs comme sources d'échec mais de nouvelles investigations s'imposent. Pour les liens de structure, la question concerne également le niveau d'exigence de leur définition. Par exemple, établir le lien de structure entre représentations décimale en chiffres et quantitative, est-ce seulement pouvoir attribuer la valeur « dizaine » au premier chiffre d'un nombre à deux chiffres? Ou est-ce aussi pouvoir comprendre que si on a pris, d'une quantité représentant un nombre à deux chiffres, la valeur correspondant à l'un des chiffres de ce nombre, il reste forcément la quantité correspondant à la valeur de l'autre chiffre? En d'autres termes, la compétence à établir les relations de structure correspond-t-elle à la définition classique de la valeur de position (Kamii (1989); Fuson *et alii* (1997); Miura *et alii* (1994), etc.) ou implique-t-elle la coordination de la multiplicité des valeurs et de la composition de la valeur (Varelas & Becker (1997))?

Deuxièmement, cette étude nous a permis de nous rendre compte de la nécessité de disposer d'épreuves évaluant l'ensemble des liens décrits dans le modèle de Fuson *et alii* (1997), ce que ne permettent pas les épreuves classiques utilisées dans la littérature. Ainsi, les regroupements et les distinctions observés ici entre les épreuves ne sont que des indications et doivent impérativement être validés par une étude dont les épreuves évalueront l'entière des liens postulés dans le modèle.

Troisièmement, cette étude ne nous permet pas encore d'investiguer le caractère unidimensionnel du développement du système en base dix : Les enfants suivent-ils vraiment tous le même parcours développemental? Quel est (sont) le(s) parcours développemental(-aux) suivi(s) par les enfants? Ici encore, seule une définition et une évaluation solides de toutes les compétences impliquées dans ce développement permettra une réelle investigation de ces questions.

Enfin, cette étude porte sur des enfants de 2^{ème} et de 3^{ème} année primaire et leur réussite aux items de traduction est déjà importante. Une nouvelle étude portant sur des enfants plus jeunes nous permettra d'observer le développement des liens de traduction en relation avec les liens de structure.

Notre prochaine étude consistera en une évaluation individuelle de toutes les relations de traduction et de structure sur un grand échantillon d'enfants ($n = 120$) afin de pouvoir observer toutes les situations développementales prévues par le modèle de Fuson *et alii* (1997). Elle portera sur des enfants de première et de deuxième année primaire testés au printemps 2002. Le caractère unidimensionnel des compétences sera testé. Si ce test s'avère négatif, nous chercherons à décrire les différents profils importants dans les réponses des enfants : les patterns de réponses observés sont-ils tous compatibles avec les différentes conceptions décrites dans le modèle de Fuson *et alii*? Dans le but d'évaluer l'acquisition de toutes les relations de traduction et de structure entre les trois modes de représentation du nombre ainsi que la manière dont ces dernières se manifestent chez les enfants, nous avons construit de nouvelles épreuves permettant l'évaluation des relations dont l'étude est impossible avec les épreuves classiques.

Remerciements

Je tiens à remercier particulièrement Catherine Van Nieuwenhoven, la professeure Lucie DeBlois ainsi que le professeur Jacques Grégoire pour leur aide précieuse et leurs judicieux conseils.

Références bibliographiques

- Bednarz, N., Dufour-Janvier, B. (1986). Une étude des conceptions inappropriées développées par les enfants dans l'apprentissage de la numération au primaire. IN *European Journal of Psychology of Education*, Vol. 1(2), pp. 17-33.
- DeBlois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. IN *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, Vol. 16(1), pp. 71-128.

- Drueck, J.V. (1997). *Factors related to conceptual understanding and solution procedures of two-digit addition and subtraction in second-grade average-math achievers and low-math achievers at-risk for learning disabilities*. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy. Illinois.
- Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. IN *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, D. Grouws (Ed.), New York : Macmillan.
- Fuson, K.C., Smith, S.T., Lo Cicero, A.M. (1997). Supporting Latino First Graders' Ten Structured Thinking in Urban Classrooms. IN *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28 (6), pp. 738-766.
- Fuson, K.C., Wearne, D., Hiebert, J.C., Murray, H.G., Human, P.G., Olivier, A.I., Carpenter, T.P., Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. IN *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28 (2), pp. 130-162.
- Hiebert, J., Wearne, D. (1996). Instruction, understanding and skill in multidigit addition and subtraction. IN *Cognition and Instruction*, Vol. 14, pp. 251-283.
- Hiebert, J., Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in the first grade. IN *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 23, pp. 68-122.
- Ho, C.S.-H., Cheng, F.S.-F. (1997). Training in place value concepts improves children's addition skills. IN *Contemporary educational psychology*, Vol. 22, pp. 495-506.
- Ho, C.S.-H., Fuson, K.C. (1998). Children's Knowledge of Tens Quantities as Tens and Ones : Comparisons of Chinese, British, and American Kindergartners. IN *Journal of Educational Psychology*, Vol. 90 (3), pp. 536-544.
- Kamii, C. (1989). *Young children continue to reinvent arithmetic-2nd grade : Implications of Piaget-s theory*. New York : Teachers College Press.
- Miura, I.T., Okamoto, Y., Kim, C.C., Chang, C.M., Steere, M., Fayol, M. (1994). Comparisons of children's cognitive representation of number : China, France, Japas, Korea, Sweden, and the United States. IN *International Journal of Behavioral Development*, Vol. 17 (3), pp. 401-411.
- Miura, I.T., Okamoto, Y., Kim, C.C., Steere, M., Fayol, M. (1993). First graders cognitive representation of number and understanding of place value : cross-national comparisons - France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. IN *Journal of Educational Psychology*, Vol. , 85 (1), pp. 24-30.
- Noël, M.-P. (2001). Le transcodage chez l'enfant. IN *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*, A. Van Hout & C. Meljac, Paris : Masson, pp. 109-117.
- Nunes, T., Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford, UK : Blakwell Publishers

- Resnick, L.B. (1983). A developmental theory of number understanding. IN *The Development of Mathematical Thinking*, H.P. Ginsburg (Ed), New York : Academic Press, pp. 109-151.
- Resnick, L.B., Omanson, S.F. (1987). Learning to understand arithmetic. IN *Advances in instructional psychology*, R. Glaser (Ed.), Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Vol. 3, pp. 41-95.
- Ross, S.H. (1989). Parts, wholes, and place value. A developmental view. IN *Arithmetic Teacher*, Vol. 36, pp. 47-51.
- Ross, S.H. (1986, April). *The development of children's place-value numeration concepts in grades two through five*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.
- Seron, X., Fayol, M. (1994). Number Transcoding in Children - A Functional Analyses. IN *British Journal of Developmental Psychology*, Vol. 12(3), pp. 281-300.
- Seron, X., Noël, M.-P., Van der Elst, G. (1997). *Where do Arabic number reading errors come from?*. Presentation on the VIIIth European Conference on Developmental Psychology, Rennes.
- Varelas, M., Becker, J. (1997). Children's developing understanding of place value : semiotic aspects. IN *Cognition and Instruction*, Vol. 15 (2), pp. 265-286.