

## Analyse numérique de la topographie et mesure des pentes

Michel Lecarpentier

Volume 18, Number 45, 1974

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/021225ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/021225ar>

[See table of contents](#)

---

Publisher(s)

Département de géographie de l'Université Laval

ISSN

0007-9766 (print)

1708-8968 (digital)

[Explore this journal](#)

---

Cite this note

Lecarpentier, M. (1974). Analyse numérique de la topographie et mesure des pentes. *Cahiers de géographie du Québec*, 18(45), 483–493.  
<https://doi.org/10.7202/021225ar>

## ANALYSE NUMÉRIQUE DE LA TOPOGRAPHIE ET MESURE DES PENTES

Pour les besoins des calculs d'insolation, les méthodes conventionnelles de mesure des pentes s'avèrent insuffisantes. Aussi l'objectif de cette note est d'exposer une méthode numérique de mesure des pentes mieux adaptée à ces besoins\*.

Il existe plusieurs procédés bien connus pour évaluer la déclivité du terrain ou mesurer les pentes (Monkhouse et Wilkinson, 1971, p. 129-165). Cependant, l'expression des résultats sur des cartes se faisant par intervalles de classes, il devient difficile de les utiliser dans des calculs exigeant des chiffres précis, notamment lorsque l'on calcule l'insolation. De plus, les procédés manuels existants ne donnent pas toujours de façon immédiate l'azimut des pentes nécessaire au calcul de l'insolation. Ceci oblige souvent à une deuxième analyse de la carte topographique pour obtenir une donnée essentielle à ce genre de calcul.

Tenant compte de ces remarques et d'autre part voulant effectuer les calculs d'insolation non plus de façon ponctuelle mais intégrale, il nous a paru intéressant de vouloir développer un procédé numérique donnant immédiatement la déclivité, l'azimut et la surface réelle des zones de pentes. Ce procédé numérique, une fois transposé en langage d'ordinateur, ne peut qu'accélérer ainsi un travail manuel fastidieux.

### 1. PRINCIPES DU DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE

On sait que par 3 points non-alignés on peut faire passer un plan et un seul.

Si l'on choisit 3 points ( $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ ) assez rapprochés les uns des autres et confondus à la surface du terrain, il est possible d'y faire passer un plan caractérisant l'état moyen du terrain entre ceux-ci. Connaissant les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  de ces points ( $x$  : longitude,  $y$  : latitude et  $z$  : altitude), on peut déterminer l'équation du plan dans l'espace, pour calculer ensuite son inclinaison sur l'horizontale, son orientation par rapport à un axe de référence (le méridien) et sa surface réelle. Le relevé systématique des coordonnées se fait aux points d'intersection des droites d'un quadrillage régulier, appliqué sur une carte topographique (figure 1) et permet une standardisation

---

\* Cette note est tirée d'une thèse de maîtrise présentée par l'auteur au département de géographie de l'Université Laval (en décembre 1973) et intitulée : *Élaboration d'un modèle numérique pour le calcul des pentes et de l'ensoleillement*. 145 pages.

du procédé nécessaire tant à sa programmation qu'au développement de ses équations de base.

a) *Calcul de la déclivité*

L'équation d'un plan passant par les points  $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$  et  $P_3 : (x_3, y_3, z_3)$  peut s'exprimer sous la forme du déterminant :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Les points ayant un espacement constant sur les axes du quadrillage, on peut considérer cet écartement comme unitaire et effectuer le développement du déterminant (1) en conséquence pour obtenir l'équation :

$$(2) \quad \frac{z_3 - z_1}{z_3} X + \frac{z_3 - z_2}{z_3} Y + \frac{1}{z_3} Z = 1,$$

équation générale d'un plan dans le système unitaire (figure 2).

Le cosinus de  $\theta$ , l'angle entre deux plans, se définit par l'équation :

$$(3) \quad \cos \theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Si l'on considère  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$ , comme les cosinus directeurs de l'équation (2) et  $A_2$ ,  $B_2$  et  $C_2$  comme ceux du plan de l'horizon, l'on obtiendra après résolution :

$$(4) \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{(z_3 - z_1)^2 + (z_3 - z_2)^2} - 1}$$

valeur du cosinus de l'angle d'inclinaison  $\theta$  d'un plan quelconque sur l'horizontale, compte tenu de l'altitude de 3 points équidistant à l'intersection des axes X et Y.

b) *Calcul de l'azimut*

L'azimut est l'angle de la direction d'un point par rapport à la direction du nord et mesuré dans le sens horaire. Cependant, pour le déterminer, il faut procéder en deux étapes. D'abord mesurer l'angle  $\alpha$  entre la projection de la normale  $n$  sur l'horizontale et un axe de référence (axe des  $\alpha$  dans ce cas précis) et ce, pour chaque quadrant. L'équation de la projection de la normale sur le plan de l'horizon étant :

$$(5) \quad Y = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} X$$

Figure 1

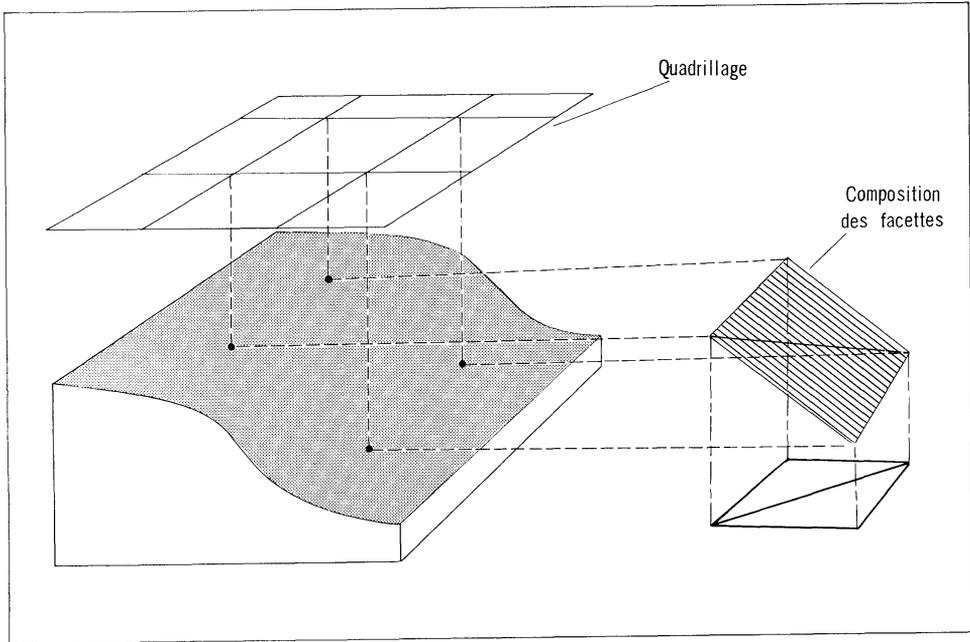
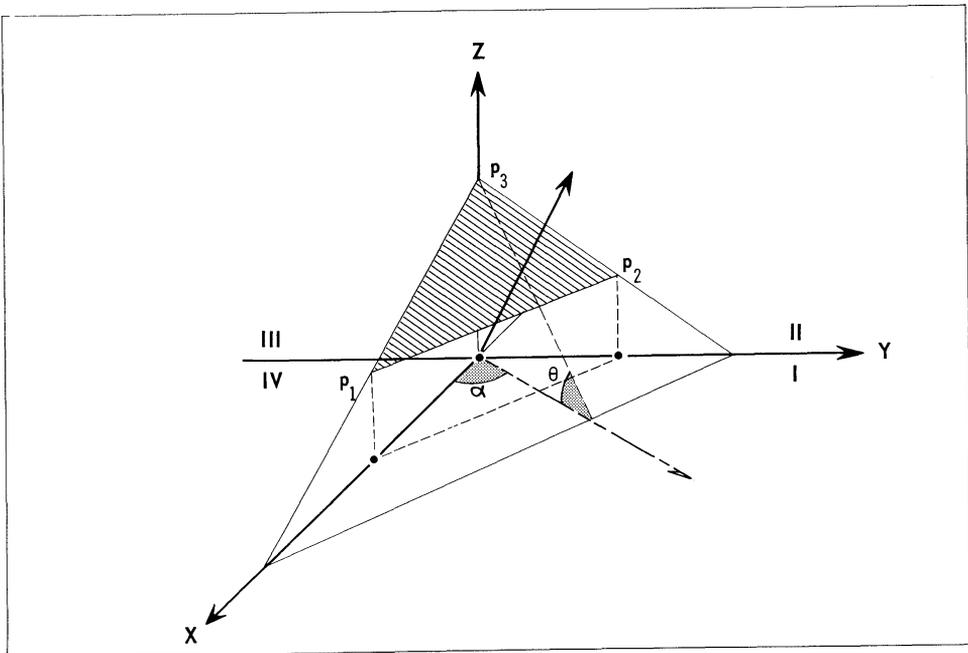


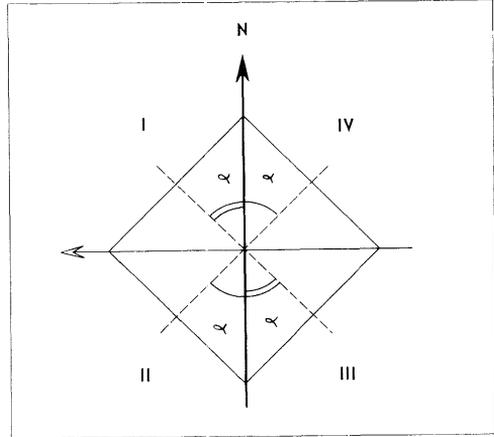
Figure 2



l'on peut déduire la tangente de l'angle  $\alpha$  entre la projection de la normale et l'axe de référence :

$$(6) \quad \tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Figure 3



Ensuite, si l'on considère l'axe de référence comme confondu avec le méridien du lieu, la partie positive de l'axe pointant vers le nord, il faut faire des corrections pour chaque valeur de  $\alpha$  suivant les quadrants afin d'obtenir les valeurs d'azimut A (figure 3, tableau I).

Tableau I

*Corrections des valeurs de  $\alpha$  pour chaque quadrant  
( $\alpha$  étant exprimé en degrés)*

<i>Quadrants</i>	<i>Azimuts</i>
I	$A = 360^\circ - \alpha$
II	$A = 180^\circ + \alpha$
III	$A = 180^\circ - \alpha$
IV	$A = \alpha$

### c) *La surface réelle*

Le plan passant par 3 points, il est possible d'y circoncrire une facette triangulaire dont chacun des points sera un sommet. Après résolution de l'équation générale de la surface d'un plan dans l'espace, nous avons obtenu, pour le système unitaire défini plus haut, l'équation :

$$(7) \quad S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(z_3 - z_1)^2 + (z_3 - z_2)^2 + 1}$$

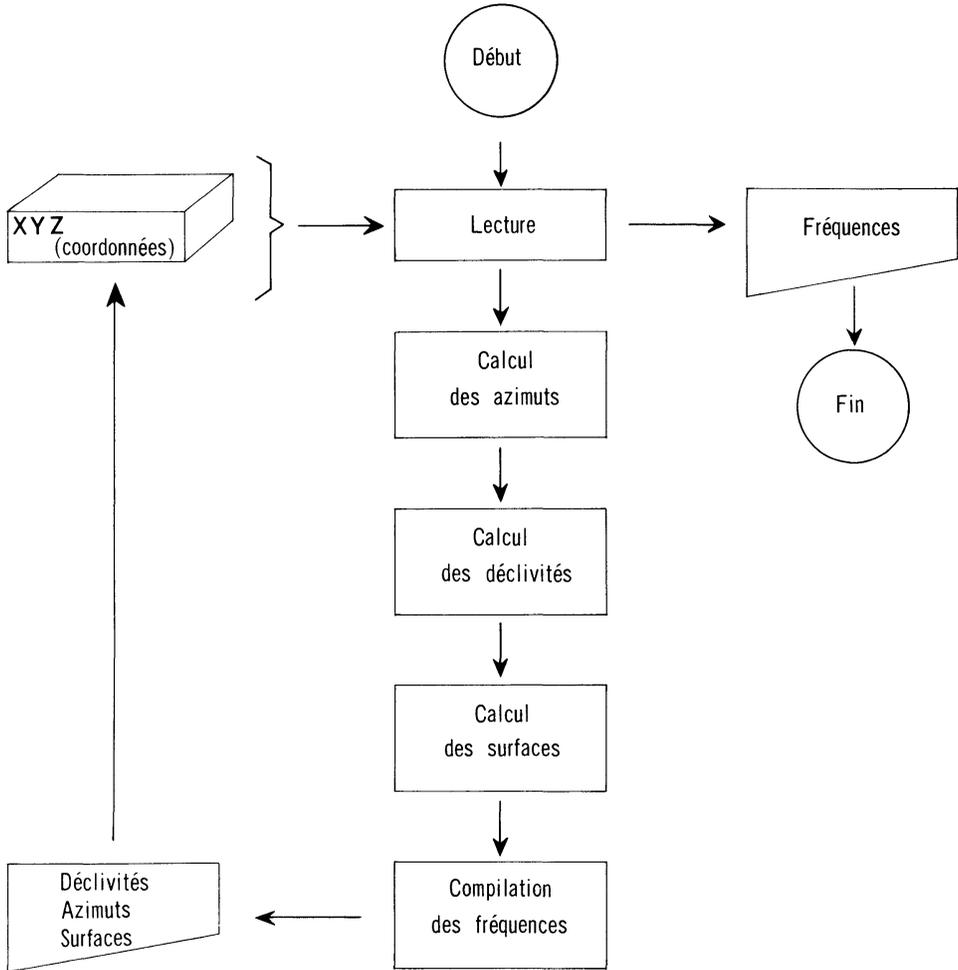
S représentant une surface relative, la surface réelle  $S_r$  sera :

$$(8) \quad S_r = \frac{S \cdot E^2}{2}$$

E étant l'équidistance réelle des points sur le terrain.

Figure 4

## DIAGRAMME LOGIQUE DU PROGRAMME : PENTES



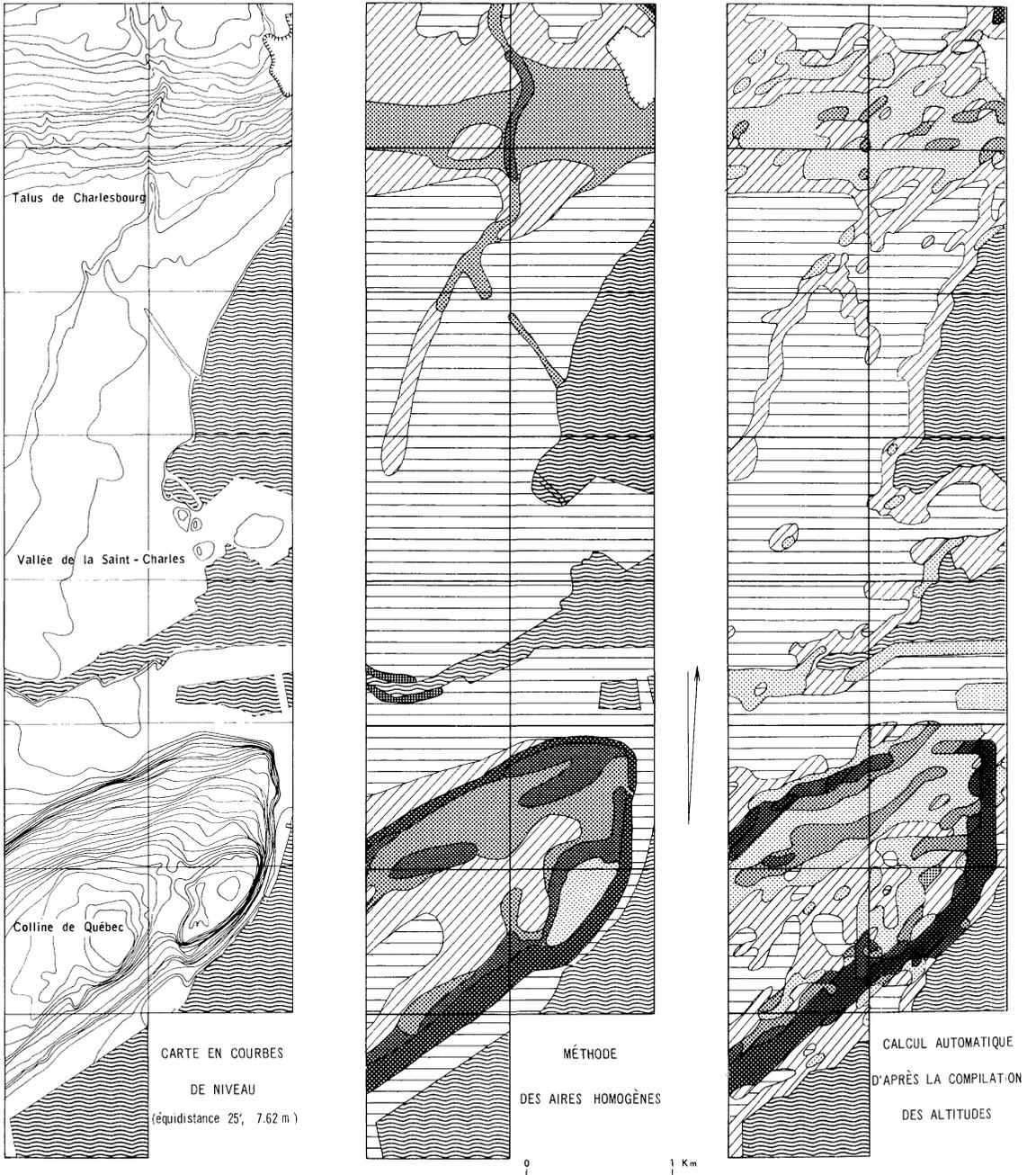
## 2. RÉSULTATS DE LA COMPILATION AUTOMATIQUE DES ALTITUDES ET DU CALCUL DES PENTES. COMPARAISON DE DEUX MÉTHODES

Un test de la méthode proposée a été effectué dans un secteur de la région de Québec (figure 5) et on a comparé les résultats avec ceux obtenus par la méthode conventionnelle dite des « aires homogènes ».

Après avoir relevé les coordonnées x, y et z des points sur des cartes topographiques au 1/25 000 de la région de Québec, à intervalles équivalant à 100 mètres et dans des carrés de 1 km de côté, leur compilation a été effectuée avec le programme PENTES. Ce programme a été développé à partir des équations définies précédemment (figure 4). Disposant de car-

Figure 5

**CARTOGRAPHIE DES PENTES SELON DEUX MÉTHODES DIFFÉRENTES**



Moins de 1°

1° à 3°

3° 1' à 6°

6° 1' à 9°

9° 1' à 14°

plus de 14°

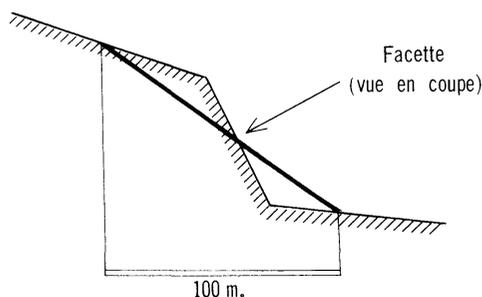
tes des pentes à la même échelle couvrant la région et dressées par J.-L. Lemieux selon le procédé des aires homogènes (Lemieux, 1971) \*, il nous a semblé important de faire une comparaison tout au moins visuelle des résultats (figure 5). Pour fins de comparaison, la carte des déclivités des facettes triangulaires a été dressée avec les mêmes intervalles de classes que ceux de la carte conventionnelle en aires homogènes (tableau II) et les surfaces en eau considérées par le procédé automatique ont été éliminées.

**Tableau II**  
*Classes de pentes considérées pour l'analyse*

<i>Classes d'inclinaison des pentes</i>	<i>Intervalles des classes</i>	<i>Étendue de classes</i>
I	de 0° à 1°	1°
II	de 1° à 3°	2°
III	de 3° à 6°	3°
IV	de 6° à 9°	3°
V	de 9° à 14°	5°
VI	plus de 14°	—

Considérant en premier lieu les zones situées sur la limite entre la terre ferme et les eaux, l'on note immédiatement que la compilation automatique des altitudes en rend mal la réalité, ce défaut étant lié d'une part à la structure triangulaire des facettes et à l'adoucissement des brusques dénivellations (figures 5 et 6) qui correspondent, dans la majorité des cas, aux rebords des quais ou aux falaises abruptes. Ce problème ne se pose pas pour le procédé des aires homogènes qui établit nettement les distinctions entre la terre ferme et les surface d'eau.

**Figure 6**

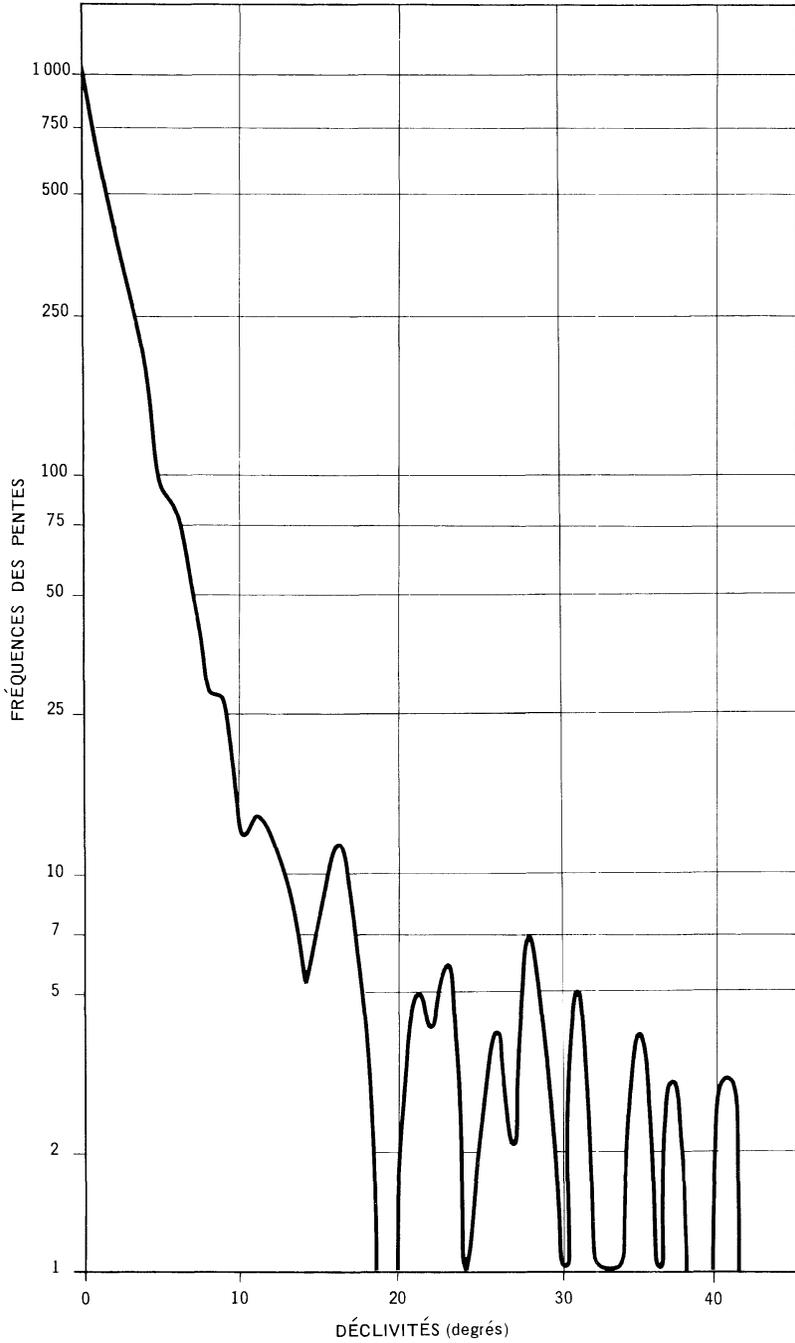


En deuxième lieu, on note que le procédé automatique permet d'obtenir plus de détails dans la cartographie des pentes supérieures à 3°, tant pour la plateforme de Québec que pour le talus de Charlesbourg. Cet état de chose semble être lié d'une part à la précision entraînée par la grande

\* Cette carte est présentée en hors-texte dans ce même numéro de la revue. Voir note explicative p. 495-506.

Figure 7

### FRÉQUENCES DES DÉCLIVITÉS DES PENTES



densité des points de relevés, et d'autre part au fait que le procédé des aires tend à subdiviser le relief de façon visuelle mais plus ou moins subjective. Cependant, cette finesse du découpage perd de sa précision pour de fortes dénivellations sur de faibles distances. Notons plus particulièrement le cas des falaises nord-ouest, nord et est de la plateforme de Québec dont les inclinaisons sont sous-estimées par le procédé automatique (figures 5 et 6).

Si l'on considère la correspondance des classes sur les deux cartes de pentes, il apparaît de nettes différences entre certaines parties du terrain, notamment pour le versant nord-ouest de la plateforme de Québec et le versant sud du talus de Charlesbourg. De telles différences se produisent le plus fréquemment entre la 4<sup>e</sup> classe de la carte des aires et la 3<sup>e</sup> de la carte par facettes triangulaires. Si l'on considère que, pour ces pentes couvrant une surface relativement étendue et dont l'inclinaison n'est pas trop forte, l'effet d'adoucissement du procédé automatique est minime, il semble possible que pour ces cas, le procédé des aires homogènes surestime les déclivités.

### 3. CARACTÉRISTIQUES DU TERRAIN SELON LE PROCÉDÉ AUTOMATIQUE

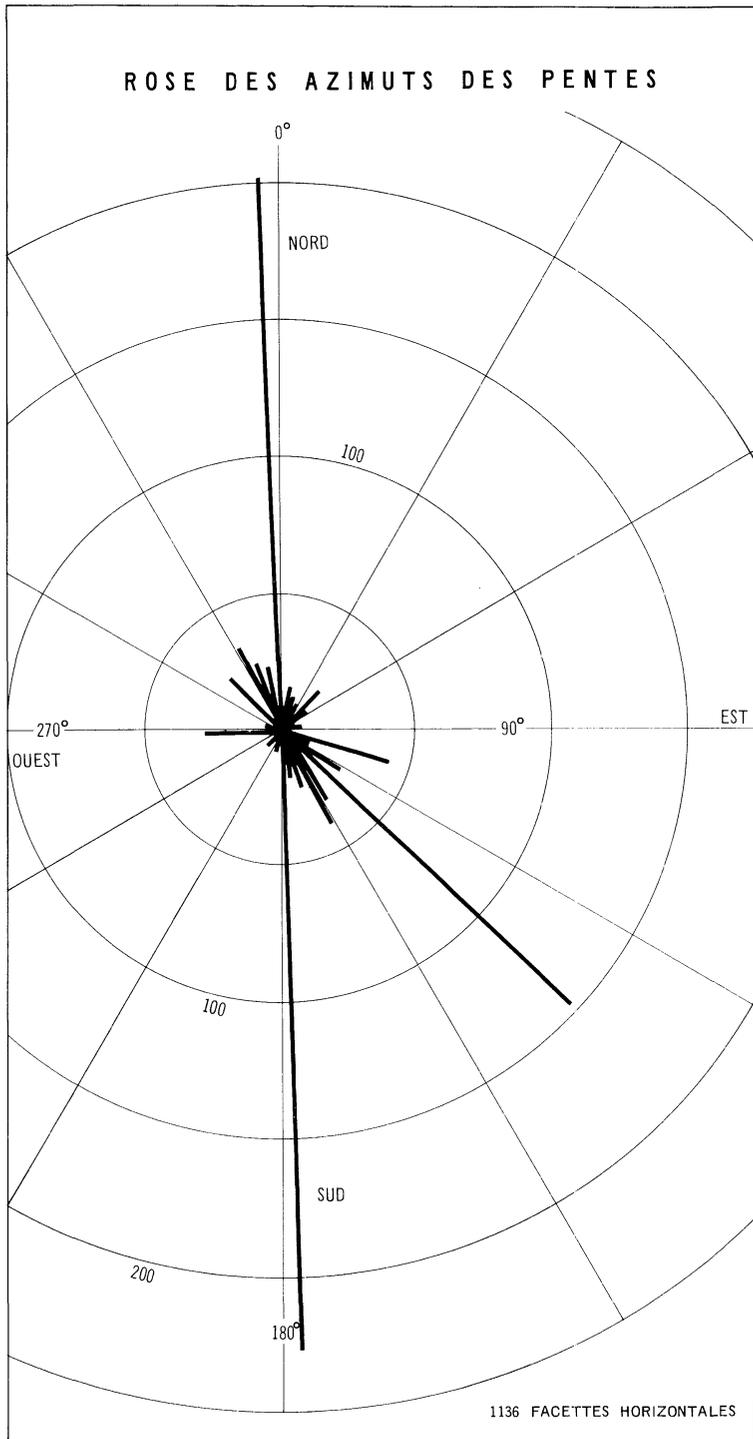
L'analyse des données caractérisant la topographie (figure 7) fait ressortir que 37,7% des déclivités de la zone cartographiée sont inférieures à 0,5° (7,1% représentent les surfaces planes des eaux). Le pourcentage monte à 76,1% si l'on ajoute les pentes de 3° et moins. Par contre, les pentes de 15° et plus ne représentent que 3,1% des surfaces. Dans l'ensemble, le terrain est relativement plat.

Les azimuts des pentes ne concernent que les facettes dont la déclivité est supérieure à 0°. L'analyse de la figure 8 montre deux dominantes, la plus forte à 178° ( $\simeq$ S) avec 227 cas et la seconde à 358° ( $\simeq$ S) avec 207 cas. Vient ensuite une troisième dominante à 133° ( $\simeq$ SE) avec 144 cas. L'ensemble des autres valeurs se distribue en éventail autour de l'axe NW-SE alors que l'on ne retrouve presque aucun cas autour de l'axe ENE-WSW. Les pentes de la première dominante sont en grande partie celles du talus de Charlesbourg. La seconde dominante rassemble celles du versant nord de la plateforme et la troisième celles des falaises dominant le Saint-Laurent.

En conclusion, bien que le procédé de calcul des pentes par facettes triangulaires ne donne pas un rendu des contours aussi précis que celui des aires homogènes, il semble intéressant sur certains points :

- d'abord par sa rapidité de compilation et par l'ensemble des résultats de déclivité, d'azimut et de surface réelle des pentes qu'il donne ;
- par la précision des mesures d'inclinaison et d'orientation faites pour chaque facette ;

Figure 8



— enfin par le calcul immédiat des fréquences des déclivités et des azimuts qui peuvent être utiles lors d'études morphologiques du terrain.

#### BIBLIOGRAPHIE

- DENEGRE, J. (1973) Développements récents de l'automatisation appliquée aux cartes topographiques à moyenne échelle. *International Yearbook of Cartography*, 13 : 81-89.
- LECARPENTIER, M. (1973) *Élaboration d'un modèle pour le calcul des pentes et de l'ensoleillement, (une application à la région de Québec)*. Québec, Thèse de maîtrise, département de géographie, Université Laval, 145 pages, ill. cartes.
- LEMIEUX, J.-L. (1971) *Les pentes dans la région métropolitaine de Québec*. Québec, Université Laval, département de géographie. 37 pages, cartes. Mémoire de recherche. Voir aussi *Cahiers de géographie de Québec*, 18 (3) 1974 :
- MONKHOUSE, F.J. et H.R. WILKINSON, (1971) *Maps and Diagrams; their compilation and construction*. Londres, Methuen & Co. Ltd, 3rd edition, 522 p., ill., cartes. Voir notamment dans le chap. 2, Gradient and Slope, p. 129-165.
- SELBY, S.M. (1970) *Standard Mathematical Tables*. 18e éd. augm., Cleveland, the Chemical Rubber Co., 725 p. ill.

Michel LECARPENTIER  
*Département de géographie*  
*Université Laval, Québec*